Chapter 3

二次函數

3-1　一元二次方程式的介紹

　一元二次方程式是說在此方程式中只有一個未知數，而未知數的最高次方是二次方，如

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \text{ 三個數都是常數。}$$

　在這單元裡我們要跟同學介紹是如何去解一元二次方程式，解一元二次方程式有三種方法：

- **1.**配方
- **2.**十字交乘因式分解
- **3.**公式

3-1　一元二次方程式的介紹

　在解一元二次方程式過程中，一定要先做“判別式”因爲這樣可事先知道這一元二次方程式的解是否有實根，如無實根就無需繼續做下去。

判別式　$ax^2 + bx + c = 0$

$$D = b^2 - 4ac$$

- **1.** $D > 0 \Rightarrow$ 有兩個相異實根；
- **2.** $D = 0 \Rightarrow$ 重根；
- **3.** $D < 0 \Rightarrow$ 無實根。

3-1　一元二次方程式的介紹

討論

在這裡要跟同學說的是，當你在解一元二次方程式時，

在方程式中未知數最高是幾次方就可以解出幾個根，例

如：$2x^3+3x+1=0$ 未知數最高是3次方，就可以解出3個

根，以此類推……等等。

3-2　解一元二次方程式

- **(一)**使用十字交乘因式分解一元二次方程式

$$\begin{array}{ccccccc} ax^2 & + & bx & + & c & = 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \text{第一項} & & \text{第二項} & & \text{第三項} & \end{array}$$

- **(二)**使用配方法解一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad (1)$$

配方時一定會用到兩個公式：

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$$

至於是配乘成 $(A+B)^2$ 或 $(A-B)^2$，就看 前面的符號是正或負，如果是正就配乘 $(A+B)^2$，如果是負就配乘 $(A-B)^2$

3-2　解一元二次方程式

- 步驟**1**：對 (1) 式等號兩邊同乘 $\frac{1}{a}$，得到

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

- 步驟**2**：因爲*bx*前面是正號，所以就配乘 $(A+B)^2$

$$(x)^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

$$\Uparrow \qquad\qquad \Uparrow \quad \Uparrow \qquad\quad \Uparrow$$

$$A^2+2\ A\ \ B+\ \ B^2=(A+B)^2$$

3-2　解一元二次方程式

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c\cdot 4a}{a\cdot 4a}=0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}=0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

3-2 解一元二次方程式

- (三)直接帶公式解一元二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3-3　拋物線方程式

下列方程式爲一拋物線方程式

$$y = ax^2 + bx + c$$

其中a,b,c爲實數，且$a \neq 0$。

- **(一)**如何判斷拋物線開口朝上或朝下？

當 $a>0$ 時，拋物線開口朝上 (如圖3-1)。

當 $a<0$ 時，拋物線開口朝下 (如圖3-2)。

3-3　抛物線方程式

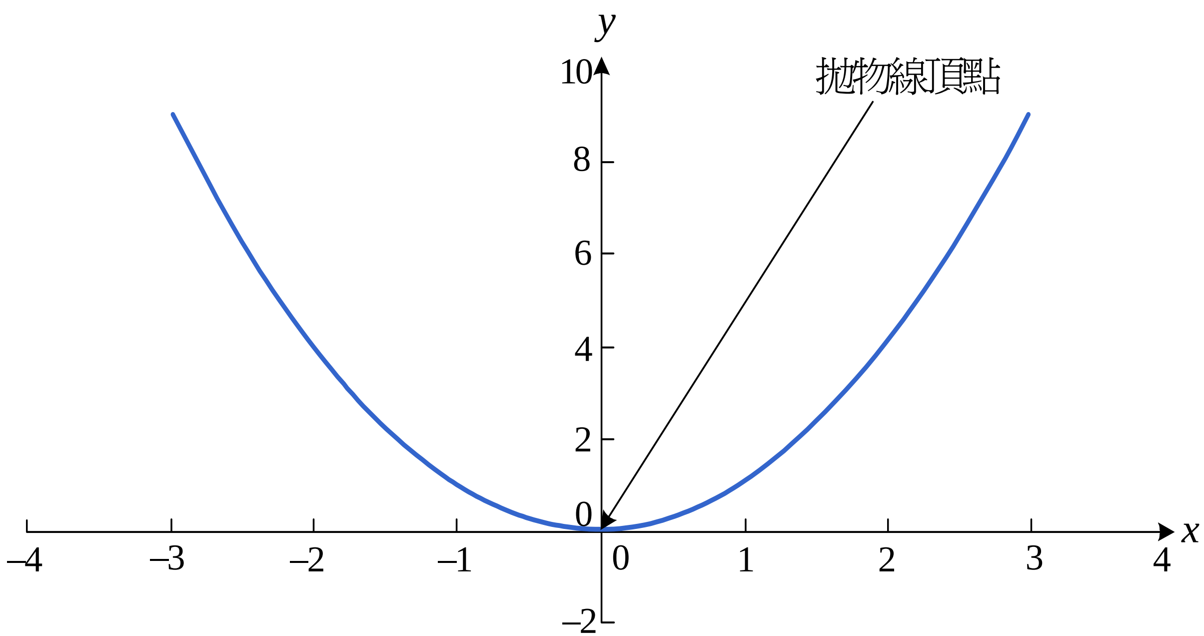

圖3-1

3-3　拋物線方程式

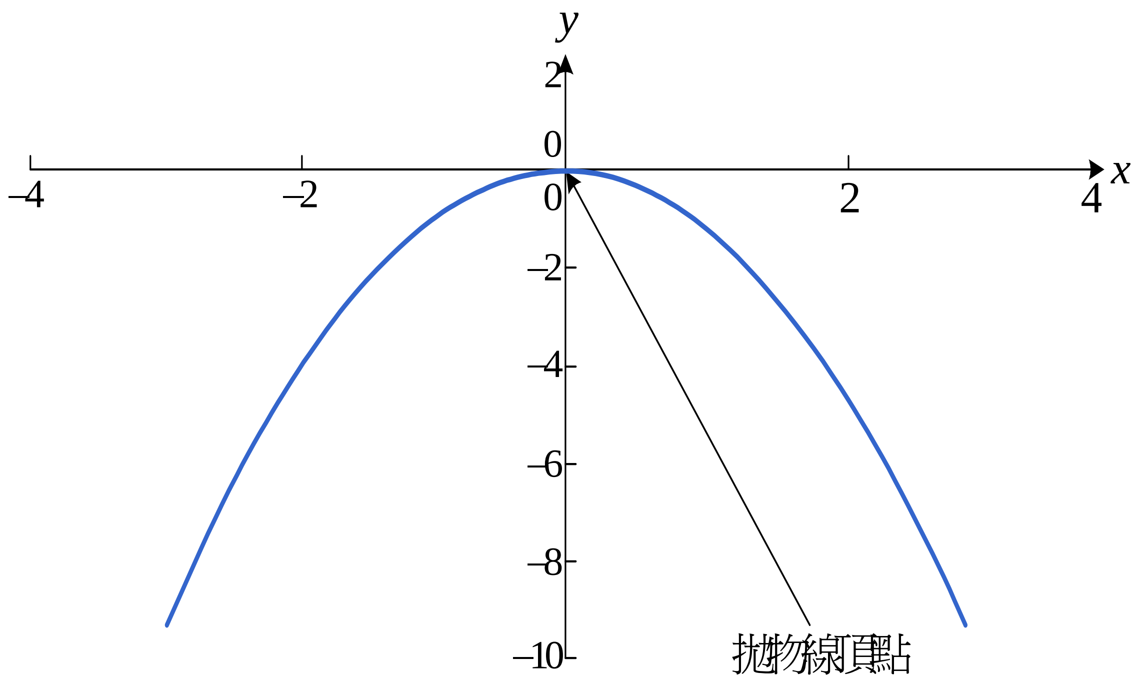

圖3-2

3-3　抛物線方程式

- **(二)**如何將抛物線頂點求出？

抛物線頂點有兩種算：(1) 配方法；(2) 直接帶公式。

- **1.**配方法

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \times \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{a} = (x)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$$

3-3 拋物線方程式

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c \cdot 4a}{a \cdot 4a}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \times a$$

$$\Rightarrow \quad y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\Uparrow$$

0

令 $x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$

$$\therefore \quad y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

拋物線頂點座標為 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

3-3　拋物線方程式

- 2.直接帶公式

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

拋物線頂點座標爲 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

3-3　拋物線方程式

- **(三)**如何求出拋物線的最大值與最小值？

1.如圖3-1拋物線開口朝上，在拋物線上的最小值是頂點，可寫成 當*a*>0時，在 x 處$-\frac{b}{2a}$，取有最小值

$$y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

2.如圖3-2拋物線開口朝下，在拋物線上的最大值是頂點，可寫成 當*a*<0 時，在 x處$-\frac{b}{2a}$，取有最大值

$$y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$