Chapter 5

指數與對數

5-1 指　數

- (一)正整數指數

　對一個任意的實數a，我們用一個符號來表示n個a連乘在一起。即

$$a \times a \times a \times \cdots \times a = a^n$$

我們稱a作底數，稱n作指數。

5-1 指 數

- 指數律

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad (5\text{-}1)$$

觀察：m個a自乘與n個a自乘相乘恰好是m+n個a自乘。

$$e^m \div e^n = \frac{e^m}{e^n} = e^{m-n} \qquad (5\text{-}2)$$

觀察：m個a自乘除以n個a自乘，因為分子分母可以兩兩相消，所以剩下來的是m-n個a自乘。

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m \qquad (5\text{-}3)$$

觀察：m個a自乘與m個b自乘相乘，a與b兩兩配對相乘後，看成是m個a × b自乘。

5-1 指　數

$$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \qquad (5\text{–}4)$$

觀察：m個a自乘除以m個b自乘，a與b兩兩配對相除後，看成是m個a/b自乘。

$$(a^m)^n = a^{m\times n} \qquad (5\text{–}5)$$

觀察：n個a^m自乘在一起，可以看成是n堆m個a自乘在一起，我們數數看總共有幾個a，結果發現恰好有m × n 個a。

指數律看起來似乎沒什麼，只是數數看有幾個相同的數字自乘在一起。同學們可以想想下面的例題。

5-1 指　數

- (二)指數的擴充

　　我們利用上面的指數律，以及下面的定義，可以將n擴充到所有的實數。

　　我們定義

- 1. 零指數：$a^0=1$，對於所有的非零數字a。
- 2. 負指數：$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$，對於所有的非零數字a。
- 3. 分數指數：$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ （在這裡 $a\geq 0$ ），我們稱為a的n次方根。也就是說，$\sqrt[n]{a}$ 自乘n次會等於a。

5-2　科學記號

在自然科學的研究裡，常常會遇到很大及很小的數字。比如說，宇宙有多大，原子有多小。像84,320,231,003,417,638這樣的數字，對我們來說是很複雜也很難理解的。為了計算上的方便，同時也為了簡單理解這樣的數字，我們利用科學記號來幫忙。

我們平常說的一百萬，利用科學記號可以表示成1×10^6。也就是說，一百萬是一個1後面跟著6個0的數字。

像上面所舉的84,320,231,003,417,638，科學家會先四捨五入後估計它大約是84,000,000,000,000,000，然後用科學記號表示出來8.4×10^{16}。你可以想像成8.4乘上一個數字，這個數字是一個1後面跟著16個0。

5-2　科學記號

兩個很大的數字，若是分別以科學記號來表示，那麼他們之間的乘除運算就簡單的多了。

科學記號通常都表示成

$$a \times 10^n$$

其中 $1 \le a < 10$ 。為什麼要對a做這樣的限制呢？我們可以先看看下面的例子，然後再做解釋。

5-3 對　數

指數與對數的關係，就好像乘法與除法的關係。當我們問：a的幾次方等於b？這個答案一般可以表示成$\log_a b$，如果我們真的知道某個數字y是上面問題的答案，則我們表示成$\log_a b=y$。這裡我們稱a為底數，b為真數。一般規定：底數a必須大於0而且不等於1，真數b必須大於0。

5-3 對　數

- 對數性質

$$a^{\log_a b} = b \quad (5\text{-}6)$$

$$\log_a a^b = b \quad (5\text{-}7)$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad (5\text{-}8)$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad (5\text{-}9)$$

$$\log_a b^r = r \log_a b \quad (5\text{-}10)$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \ (\text{換底公式}) \quad (5\text{-}11)$$

5-4　常用對數

我們稱以10作底的對數值為常用對數，通常在符號上我們會省略10。即

$$\log_{10} a = \log a$$

我們想知道2^{100}等於多大的數字？一個辦法是直接用計算機來計算，但是即使我們計算出來了，我們只是知道這一個數字，如果我們只想知道那個數字是幾位數字呢？當然你可以直接數數看剛剛算出來的這一個數字有幾位數。在這裡我們教大家另一種算法。

5-4　常用對數

我們從例34裡有個小發現，10,000,000是一個八位數字，他的常用對數值是7，恰好是去掉最高位後剩下的位數。所以，合理的推想是，任何一個數字，看他的常用對數值就可以了。可是，大多數的數字其常用對數值不是一個整數。所以，正確的看法是，取其常用對數值的整數部分然後加1，就是原數字的位數。

5-4 常用對數

我們也觀察一下0.00001這個數字，他的常用對數值是-5，因為0.00001小於1，所以常用對數值小於0。這個時候我們可以針對-5這個數值得到什麼推論呢？觀察0.00001這個數字，我們發現，從小數點第五位開始不為0，或者說，從第一個不為0的數字往前數，不算小數點，總共有五個0。對於任意一個比1小的數字，我們是不是也可以得到同樣的結論？答案是對的。不過過程比較麻煩。

5-4　常用對數

　　我們重新觀察loga，當a>1時，loga>0。我們可以將loga表示成兩個數字相加的和：n+k，其中n是整數，k是小數。

兩個數字都大於0。依照前面的做法，我們只要把n加上1就是loga的位數。在這裡我們稱n是首數，k是尾數。當a<1時，loga<0。我們也想將loga表示成類似兩個數字相加的和：n+k。這個時候，我們希望k是一個大於零的小數。

要達到這個目的，我們會讓n變得小一點，好讓k大於零。

$$-xxx.yyy$$

說得更明白點，因為loga<0，所以會表示成這個型式：

5-4　常用對數

我們令n=-xxx-1, k=1-yyy。此時k是一個大於零的小數。

我們依舊稱n是首數，k是尾數。我們可以得到：loga在小數點後第-n位開始不為0。

5-4 常用對數

- 常用對數表

　　對於任意的一個正數a，我們如何知道$\log_{10}a$是多少？事實上，除了少數的情形，比如說$\log_{10}1000=3$，其他的數字a所對應的對數值都是無窮不循環小數。我們當然可以利用數學的方法計算出來，但是這個方法已經超出本書的範圍，而且也不是一般人常用的辦法。我們最常利用的，是直接查詢對數表。對數表就是數學家利用數學方法計算出來的估計值。只要我們懂得如何查詢對數表，就可以很快的估計到某個數字a的常用對數$\log_{10}a$

5-4　常用對數

對數表裡我們只列出所有大於1小於10間隔0.01的所有數字a所對應到的對數值$\log_{10}a$。也就是說，從1.00到9.99共900個數字a它們所對應的對數值。因為$\log 1.00=0$及$\log 9.99<1$，所以這些對應的數字都介於0與1之間，我們只表示出小數點後前四位作為其近似值。我們將數字a分成兩個部分：整數與小數第一位構成的兩個數字擺在左邊縱向那一行，小數第二位這個數字擺在上方橫向那一列。兩個數字縱橫交錯的數字就是a所對應的對數值。比如說，a=5.23。我們先找到左邊的52及上邊的3，然後看這兩個數字所在行列的交錯位置是什麼數字，我們就可以得到log5.23的估計值0.7185。(參考下圖)

5-4　常用對數

x	0…	3	…9
52		7185	