Chapter 1

直 線

1-1　平面直角座標

一個平面被橫軸與縱軸分成四個部分，分別為第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限。各象限內的點座標取值符號分類如下：

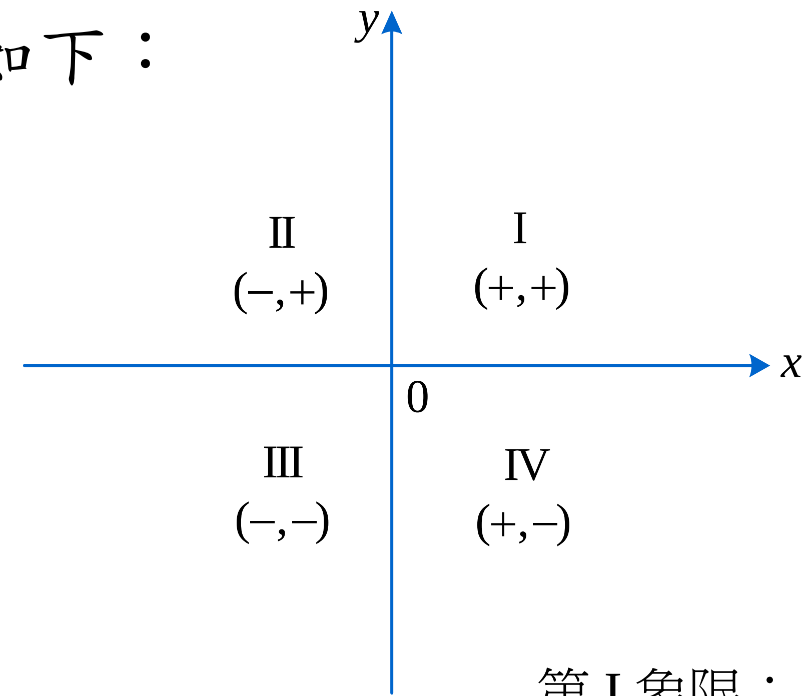

圖1-1

第 I 象限：$x > 0$, $y > 0$　　第 II 象限：$x < 0$, $y > 0$

第 III 象限：$x < 0$, $y < 0$　　第 IV 象限：$x > 0$, $y < 0$

1-2　平面上兩點的距離

如圖1-2所示，$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_2, y_1)$ 為平面上三點且 $\overline{BC} \perp \overline{AC}$，我們知道$A, C$兩點的距離 $\overline{AC} = |x_2 - x_1|$，$B, C$兩點距離 $\overline{BC} = |y_2 - y_1|$

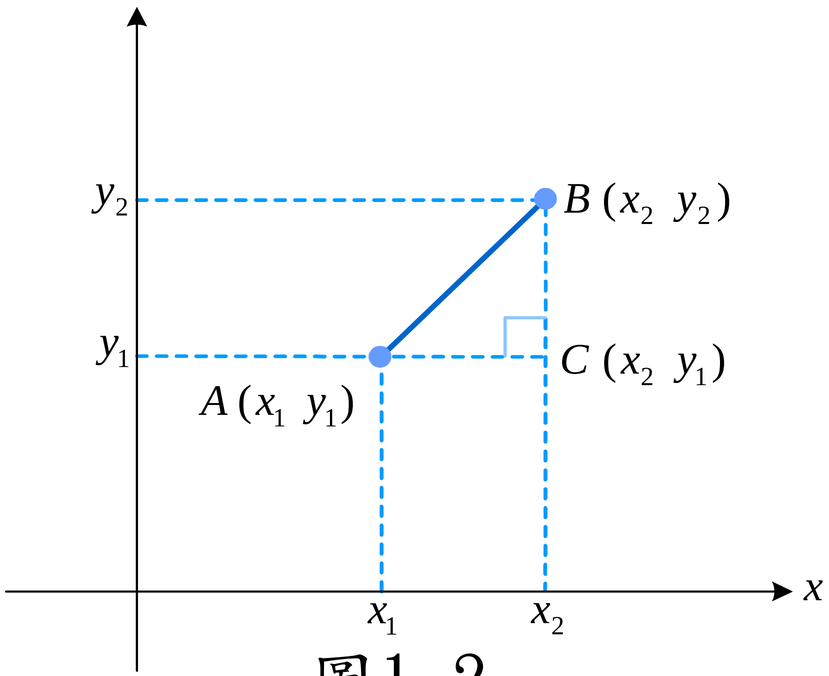

圖1-2

1-2　平面上兩點的距離

由畢氏定理知道：

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}$$

$$= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

平面上兩點距離的公式：設 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 為平面上任意兩點，則這二點的距離為

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1-3　平面上兩點間之中點座標

設 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 為平面上相異兩點，則線段 $\overline{AB}$ 之中點座標為 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

1-4　直線斜率

設直線L通過座標平面上相異兩點$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，則L的斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$（通常以$m$表示直線的斜率，看圖1-3）。

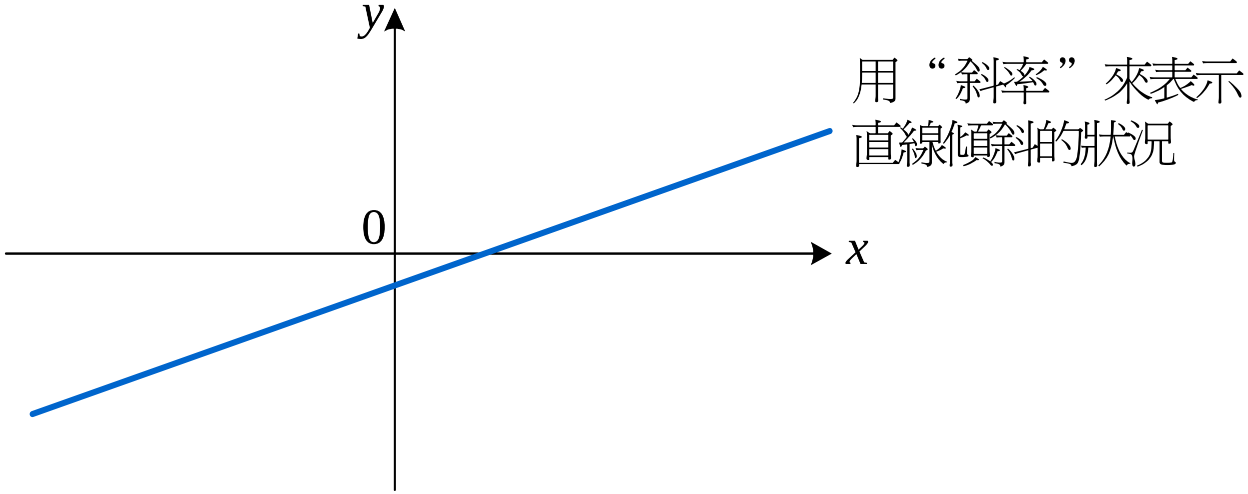

圖1-3

1-5　直線的點斜式方程式

直線方程式是指直線上的任何一點座標所滿足的方程式，並且不在該直線上的任何一點的座標都不滿足該方程式。

設 $A(x, y)$是直線上的任意一點，則有

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

上面所列之方程式稱為直線的點斜式方程式。

1-6　直線的斜截式方程式

假若直線與x軸的交點為$(A, 0)$，則稱A為直線在x軸上的截距。若直線與y軸的交點為$(0, B)$，則稱B為直線在y軸上的截距。

設直線的斜率為m，在y軸上的截距為B，則直線與y軸的交點為$(0, B)$，故由直線的點斜式方程式可以得到

$$y - B = m(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = mx + B$$

上面所列之方程式稱為直線的斜截式方程式。

1-7　直線的兩點式方程式

設 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 為直線上兩個不同的點：

1. 若 $x_1=x_2$，則直線平行 y 軸，因此直線方程式為 $x=x_1$
2. 若 $y_1=y_2$，則直線平行 x 軸，因此直線方程式為 $y=y_1$
3. 若 $x_1 \neq x_2$ 且 $y_1 \neq y_2$，則直線方程式為 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

又因直線通過點 (x_1, y_1)，故由直線點斜式方程式可以得到

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

上面所列之方程式稱為直線的兩點式方程式。

1-8　直線的截距式方程式

假設有一直線，在x軸上截距為A，在y軸上截距為B，且$A \cdot B \neq 0$，則該直線會通過$(A, 0), (0, B)$，故由直線兩點式方程式，可以得到

$$\frac{y-0}{B-0}=\frac{x-A}{0-A}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{B}=\frac{x-A}{-A} \quad \text{(對角線相乘)}$$

$$\Rightarrow -Ay=B(x-A)$$

$$\Rightarrow -Ay=Bx-AB$$

$$\Rightarrow Bx+Ay=AB \quad \text{(對等號兩邊同乘 } \frac{1}{AB}\text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1$$

上面所列之方程式稱為直線的截距式方程式