

# Chapter 3

## 拋物線

## 3-1 拋物線意義



在一平面上給定一直線 $D$ ， $D$ 稱為準線及一定點 $F$ ， $F$ 稱為焦點。在平面上的點 $(x, y)$ 與直線 $D$ 的垂直距離若是等於 $(x, y)$ 與 $F$ 的距離。如此將所有點 $(x, y)$ 所成的集合連線，即形成拋物線。通過焦點與準線垂直的直線稱為此拋物線的軸（或對稱軸），拋物線與軸的交點稱為拋物線的頂點。

# 3-1 拋物線意義

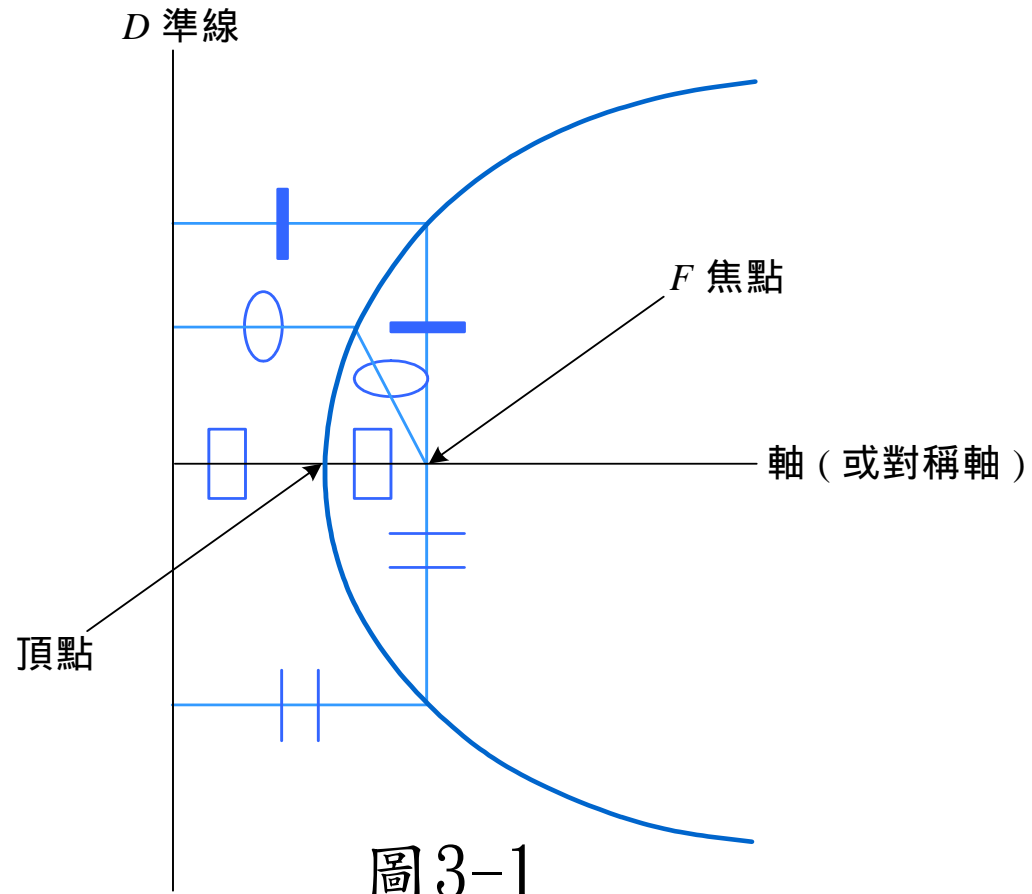


圖3-1

## 3-2 拋物線方程式（開口朝上、朝下）



假設一拋物線以  $F(h, k+a)$  為焦點， $y=k-a$  為準線

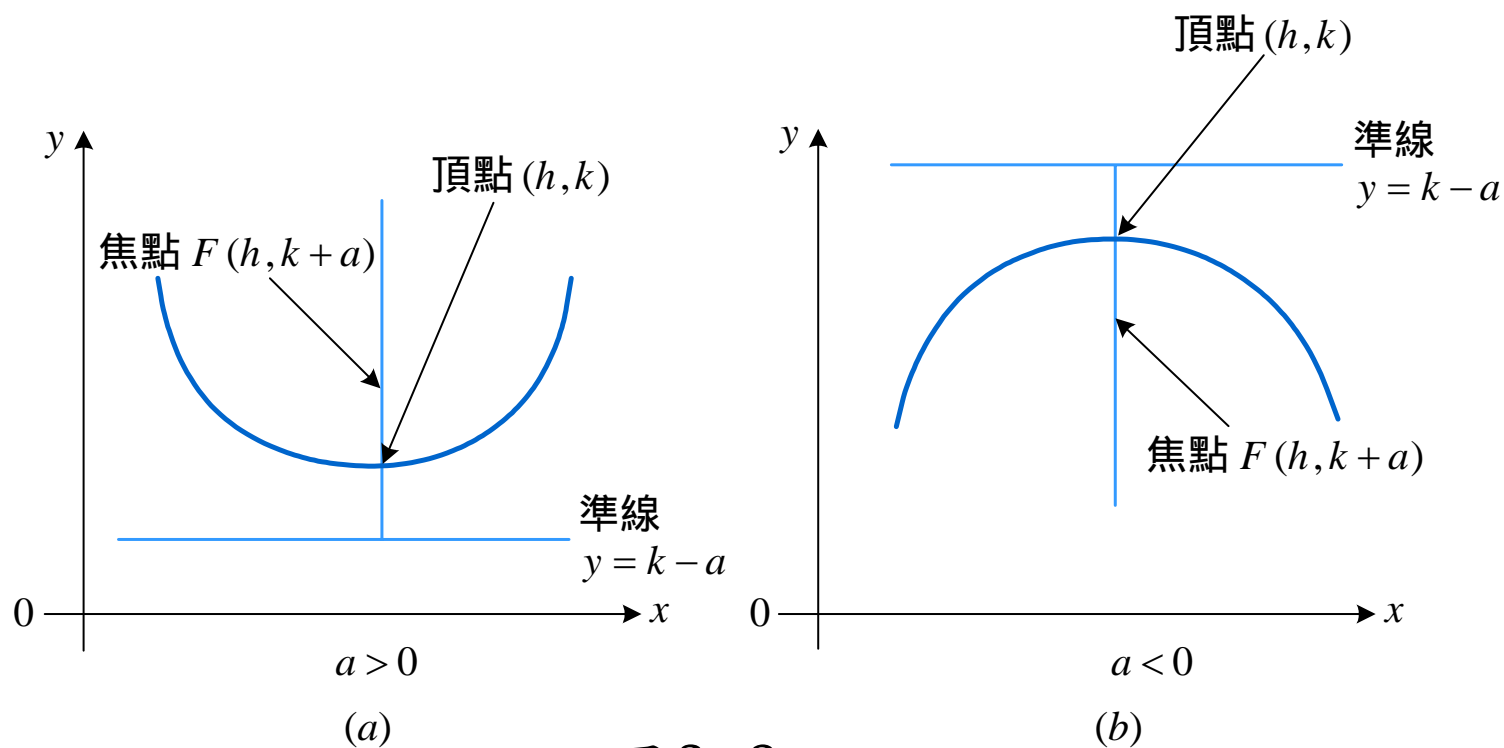


圖 3-2

## 3-2 拋物線方程式（開口朝上、朝下）



若  $(x, y)$  為拋物線上的任意一點（看圖3-2），則

$$\sqrt{(x-h)^2 + [y-(k+a)]^2} = |y-(k-a)| \quad (\text{對等號兩邊平方})$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 + [y-(k+a)]^2 = [y-(k-a)]^2$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 = [y-(k-a)]^2 - [y-(k+a)]^2$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 = y^2 - 2y(k-a) + (k-a)^2 - [y^2 - 2y(k+a) + (k+a)^2]$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 = y^2 - 2yk + 2ya + (k-a)^2 - y^2 + 2yk + 2ya - (k+a)^2$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 = 4ya + k^2 - 2ka + a^2 - k^2 - 2ka - a^2$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 = 4ya - 4ka$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 = 4a(y-k)$$

## 3-2 拋物線方程式（開口朝上、朝下）



此方程式為拋物線開口朝上或朝下，且拋物線頂點到準線距離及拋物線頂點到焦點距離均為 $a$ 。

那如何判斷拋物線開口朝上或朝下？

$$(x - h)^2 = 4a(y - k)$$

- 1. 當 $a > 0$ 時，拋物線開口朝上。
- 2. 當 $a < 0$ 時，拋物線開口朝下。

## 3-2 拋物線方程式（開口朝上、朝下）



拋物線上任意二點相連的線段稱為此拋物線的一弦，過焦點的弦稱為焦弦。與準線平行的焦弦稱為正焦弦，而正焦弦的長度即稱為正焦弦長  $= |4a|$

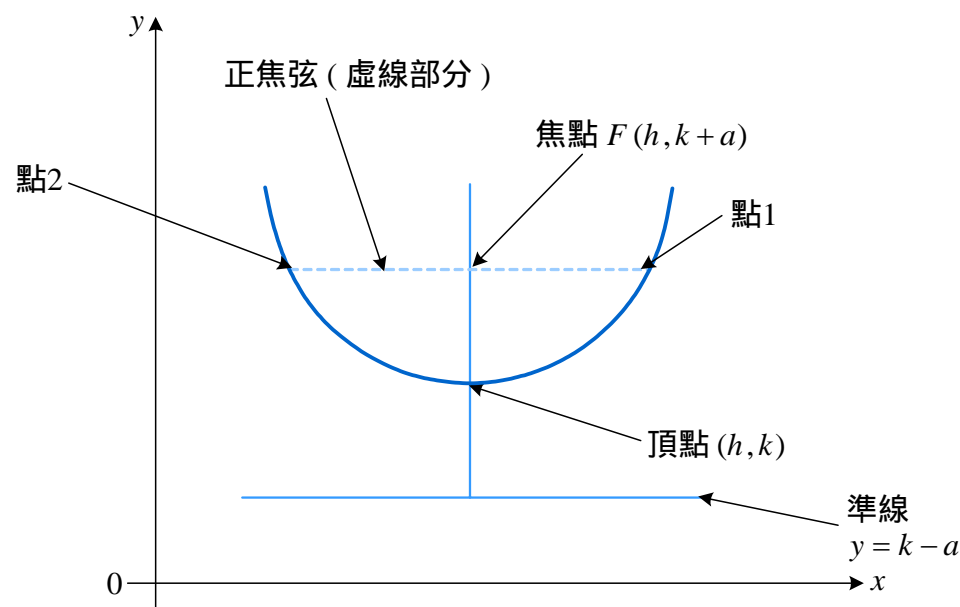


圖 3-3

## 3-2 拋物線方程式（開口朝上、朝下）



拋物線方程式為  $(x-h)^2 = 4a(y-k)$

正焦弦方程式  $y = k + a$

$$\begin{cases} (x-h)^2 = 4a(y-k) & (1) \\ y = k + a & (2) \end{cases}$$

解聯立方程式

將(2)式代入(1)式

$$\Rightarrow (x-h)^2 = 4a(k+a-k)$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 = 4a^2$$

$$\Rightarrow x-h = \pm\sqrt{4a^2}$$

$$\Rightarrow x = h \pm 2a$$



## 3-2 拋物線方程式（開口朝上、朝下）



點1座標為  $(h + 2a, k + a)$

點2座標為  $(h - 2a, k + a)$

從點1座標到點2座標 = 正焦弦長 =  $|h + 2a - (h - 2a)| = |4a|$

同理  $(y - k)^2 = 4a(x - h)$  的正焦弦長一樣為  $|4a|$

### 3-3 拋物線方程式（開口朝左、朝右）



假設一拋物線以  $F(h+a, k)$  為焦點， $x=h-a$  為準線

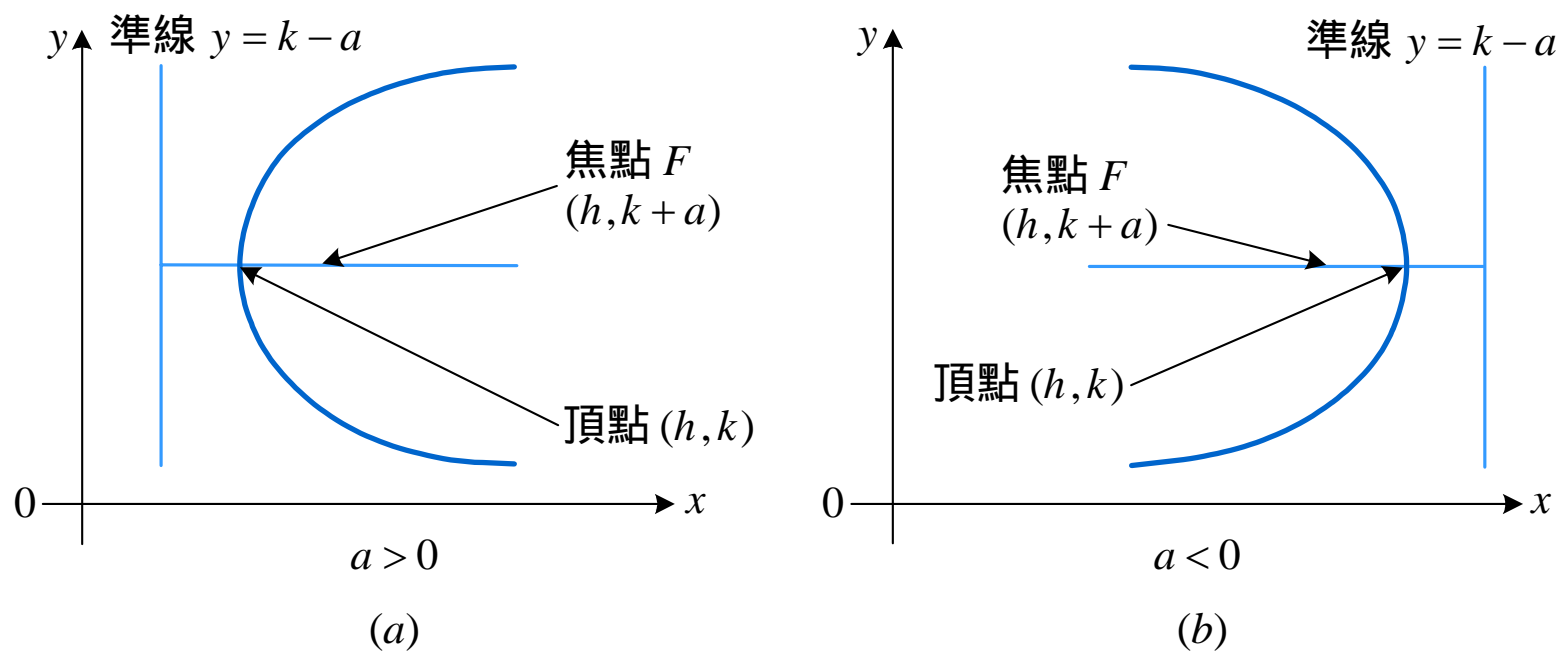


圖3-4

### 3-3 拋物線方程式（開口朝左、朝右）



假若  $(x, y)$  為拋物線上的任意一點（看圖3-4）

則  $\sqrt{[x-(h+a)]^2 + (y-k)^2} = |x-(h-a)|$  （對等號兩邊平方）

$$\Rightarrow [x-(h+a)]^2 + (y-k)^2 = [x-(h-a)]^2$$

$$\Rightarrow (y-k)^2 = [x-(h-a)]^2 - [x-(h+a)]^2$$

$$\Rightarrow (y-k)^2 = x^2 - 2x(h-a) + (h-a)^2 - [x^2 - 2x(h+a) + (h+a)^2]$$

$$\Rightarrow (y-k)^2 = x^2 - 2xh + 2xa + (h-a)^2 - x^2 + 2xh + 2xa - (h+a)^2$$

$$\Rightarrow (y-k)^2 = 4xa + h^2 - 2ha + a^2 - h^2 - 2ha - a^2$$

$$\Rightarrow (y-k)^2 = 4xa - 4ha$$

$$\Rightarrow (y-k)^2 = 4a(x-h)$$

### 3-3 拋物線方程式（開口朝左、朝右）



此方程式為拋物線開口朝左或朝右，且拋物線頂點到準線距離及拋物線頂點到焦點距離均為 $a$

那如何判斷拋物線開口朝左或朝右？

$$(y - k)^2 = 4a(x - h)$$

- 1. 當 $a > 0$ 時，拋物線開口朝右。
- 2. 當 $a < 0$ 時，拋物線開口朝左。