

Chapter 4



4-1 圓的方程式



請看看下面的圖形，我們怎麼稱呼它。

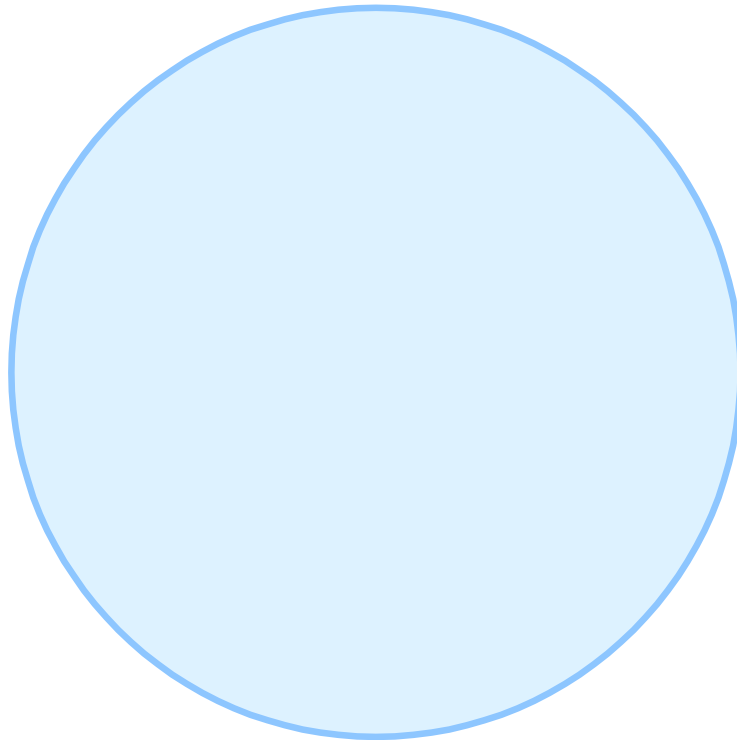


圖4-1

4-1 圓的方程式



同學們應該會很自然的說：這是圓形。沒錯，它是叫做圓形。在這一章裡面，我們要討論這個圖形的性質，學習利用方程式的方式來表示它，接著，我們要討論一些圖形之間的關係。

首先，我們要先複習一下距離的概念。請看下面圖形中兩個點的關係，

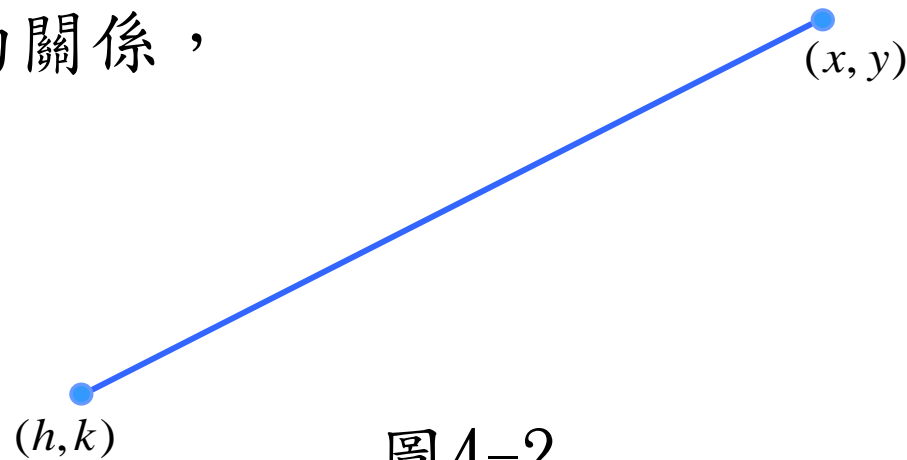


圖4-2

4-1 圓的方程式



這兩個點分別用座標表示為 (x, y) 及 (h, k) ，因為這兩個點有距離，所以我們用下面的式子，來表示這個距離的長度，

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

當然，我們可以直接用尺量出實際的距離大小，假設長度是3，那麼我們也可以這麼表示，

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = 3$$

4-1 圓的方程式



我們回頭看看圖4-1，我們發現，圓形有一個特性：圓形上面的每一個點到中心的距離都一樣長。我們把中心的點稱作圓心，圓形上的點到圓心的距離我們稱作半徑，利用上面表示距離的方式，我們可以得到圓的方程式：

圓的方程式：如果圓的圓心座標是 (h, k) ，半徑是 r ，那麼這個圓的方程式表示成：

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

4-1 圓的方程式



上面方程式的意義就是，所有圓形上面的點，距離圓心的長度等於半徑。但是，因為方程式裡牽涉到根號，為了讓方程式簡單好看，我們選擇在等式的兩邊同時平方，這樣根號就不見了，變成下面的方程式：

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad (4-1)$$

我們稱呼上面的式子為圓的方程式。

4-2 圓與點的關係



我們看看下面的圖形：

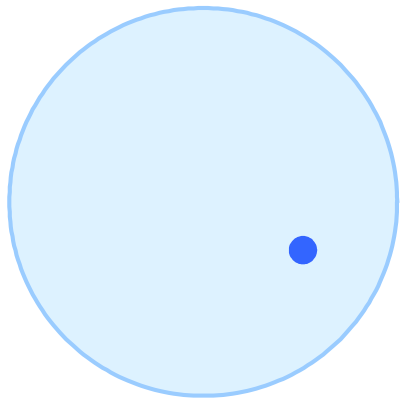


圖4-3

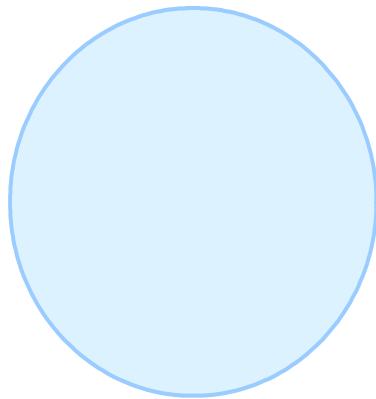


圖4-4

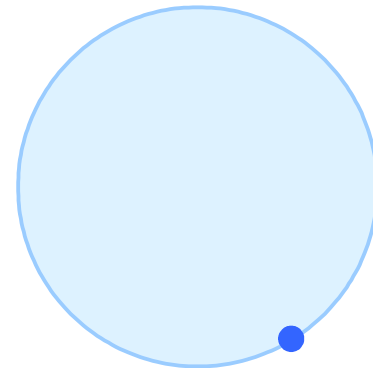


圖4-5

4-2 圓與點的關係



我們觀察出，圖4-3中的點在圓的裡面，圖4-4中的點在圓的外面，而圖4-5的點在圓的上面，我們可以把上面的關係，利用數學的式子來表示：

首先，我們回憶4-1節中提到的距離公式。

如果圓心座標是 (h, k) ，點 A 的座標是 (x, y) ，那麼圓心跟點 A 的距離表示成

$$d = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

4-2 圓與點的關係



1. 如果 $d < r$ ，那麼我們說點 A 在圓的裡面，就好像圖 4-3 的樣子。
2. 如果 $d > r$ ，那麼我們說點 A 在圓的外面，就好像圖 4-4 的樣子。
3. 如果 $d = r$ ，那麼我們說點 A 在圓的上面，就好像圖 4-5 的樣子。

這時候，點 A 的座標代入圓的方程式中會成立。

4-3 圓與圓的關係



在前一節裡，我們討論了圓跟點之間的關係，在這一節，我們看看兩個圓之間有什麼關係。

首先，我們先討論兩個半徑一樣大的圓，我們看看下面的圖形：

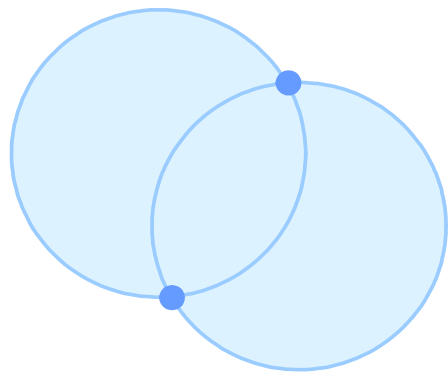


圖4-6

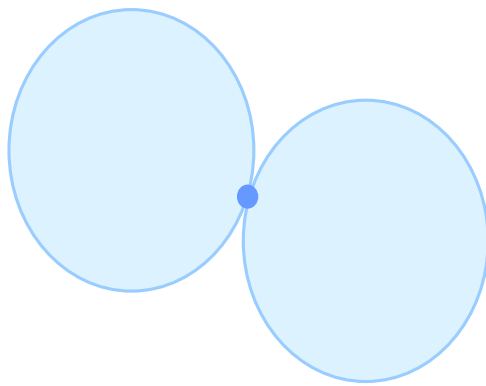


圖4-7

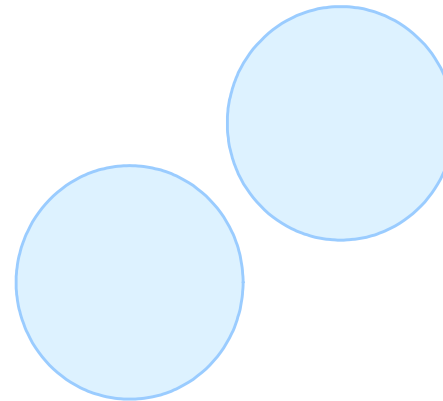


圖4-8

4-3 圓與圓的關係



我們觀察出，圖4-6中兩個圓相交在兩個點上，圖4-7中兩個圓交會在一個點上，而圖4-8兩個圓沒有任何交會，我們可以把上面的關係利用數學的式子來表示。

首先，我們回憶4-1節中提到的距離公式：

如果圓 A 的圓心座標是 (h, k) ，圓 B 的圓心座標是 (x, y) ，兩圓的半徑都是 r ，那麼圓 A 跟圓 B 的兩圓心距離表示成

$$d = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

4-3 圓與圓的關係



1. 如果 $d < r + r = 2r$ ，那麼我們說圓 A 與圓 B 相交。
2. 如果 $d > r + r = 2r$ ，那麼我們說圓 A 與圓 B 不相交。
3. 如果 $d = r + r = 2r$ ，那麼我們說圓 A 與圓 B 相交在一個點上，這時候，我們用相切來稱呼這種情形，相交的點稱為切點，這個點的座標代入圓 A 方程式會成立，代入圓 B 方程式也會成立。

4-3 圓與圓的關係



兩個圓的半徑不一定會一樣大，這時候的關係會是怎麼樣？

我們可以看看下面的圖形：

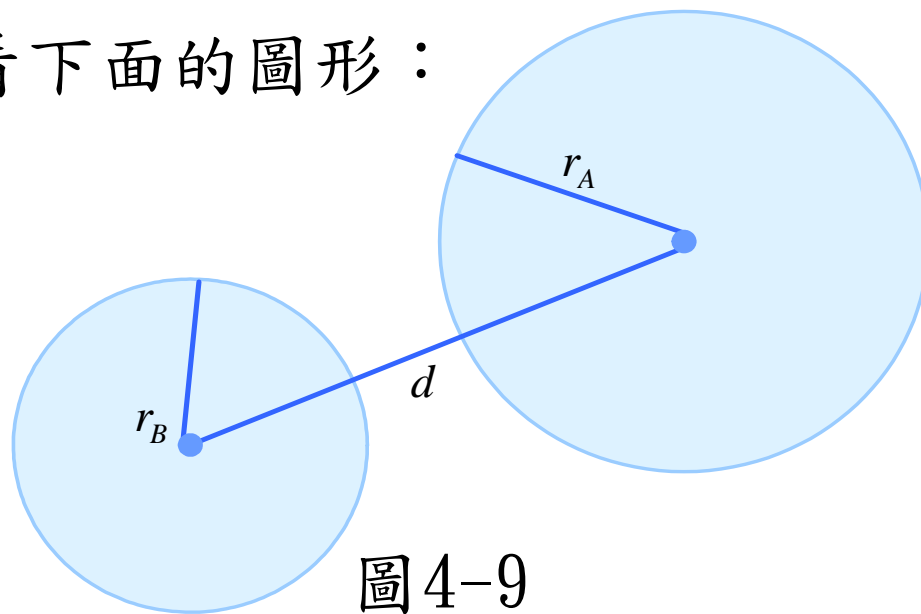


圖4-9

圖4-9的兩個圓不相交，我們看看兩圓心距離 跟兩圓半徑的關係我們發現

4-3 圓與圓的關係

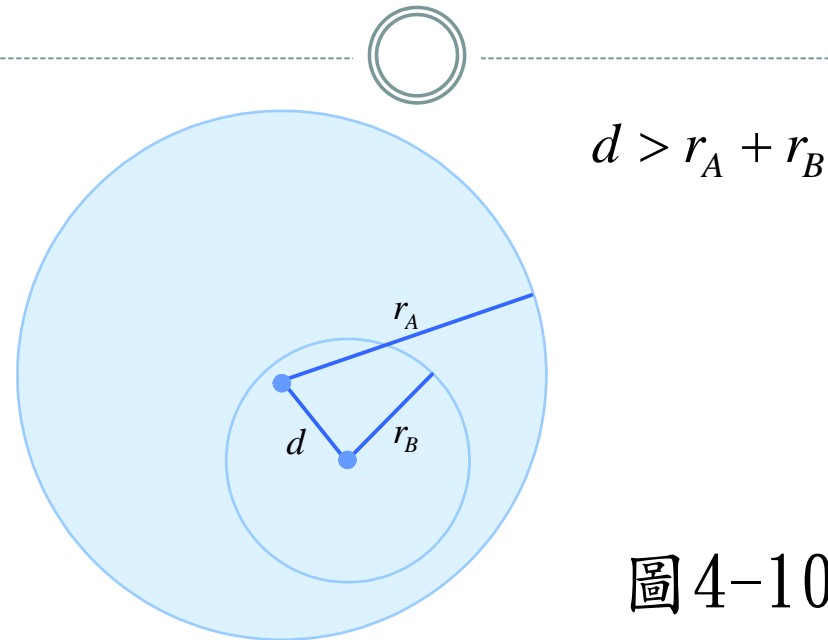


圖4-10的兩個圓也是不相交，只是小圓在大圓的裡面，我們也看看兩圓心距離 d 跟兩圓半徑的關係，我們發現(大圓半徑是 r_A 小圓半徑是 r_B)

$$d < r_A - r_B$$

總結來說，兩個圓不相交的條件是 $d > r_A + r_B$ 或是 $d < r_A - r_B$

4-3 圓與圓的關係

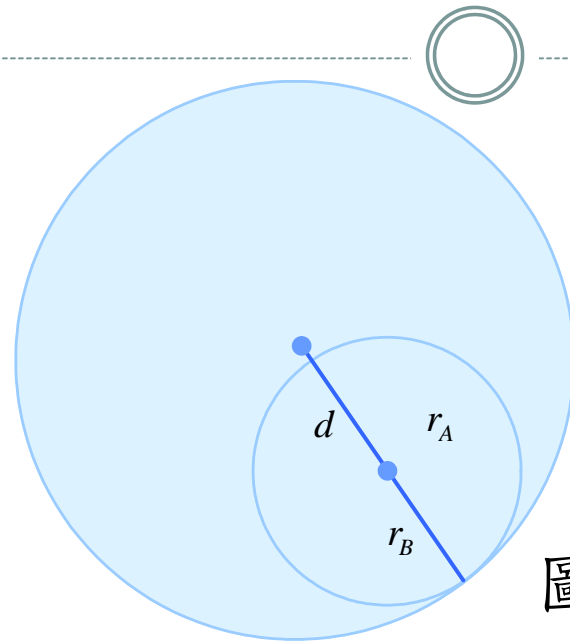


圖4-11

圖4-11的兩個圓相切，只是小圓在大圓的裡面，我們看看兩圓心距離 d 跟兩圓半徑的關係，我們發現(大圓半徑是 r_A 小圓半徑是 r_B)

$$d = r_A - r_B$$

4-3 圓與圓的關係

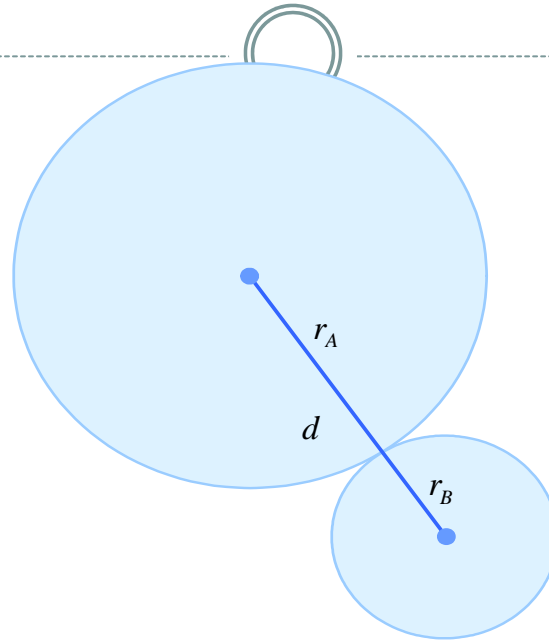


圖4-12

圖4-12的兩個圓也是相切，這時小圓在大圓的外面，我們看看兩圓心距離 d 跟兩圓半徑的關係，我們發現(大圓半徑是 r_A 小圓半徑是 r_B)

總結來說，兩個圓不相交的條件是 $d=r_A-r_B$ 或是 $d=r_A+r_B$

4-3 圓與圓的關係

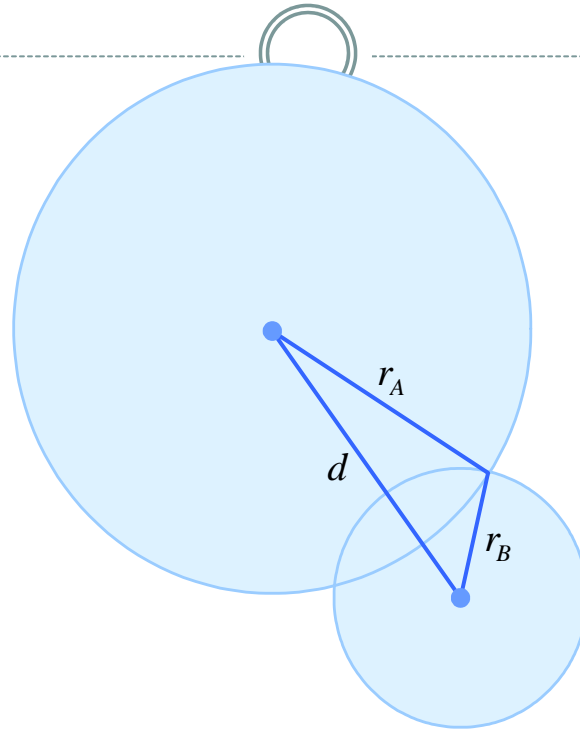


圖4-13

圖4-13的兩個圓相交，我們看看兩圓心距離 d 跟兩圓半徑的關係，我們發現(大圓半徑是 r_A 小圓半徑是 r_B)

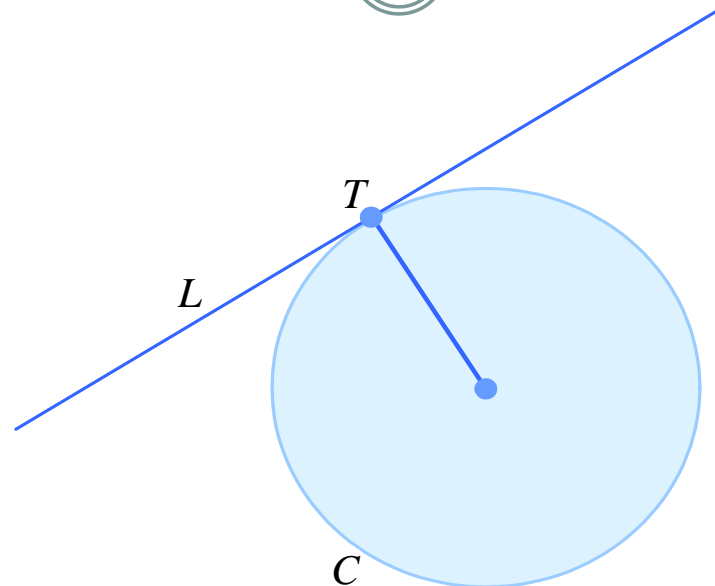
$$r_A - r_B < d < r_A + r_B$$

上面的不等式是從圖4-13中的三角形得到的。

4-4 圓與直線的關係



請看下圖：



線 L 與圓 C 相交在一點上，也就是說， T 點在線 L 上，也在圓 C 上，我們說線 L 與圓 C 相切，我們稱點 T 為切點。

如果我們連接圓心與點 T ，那麼連成的直線會跟線 L 垂直，這是一個重要的性質。

如果給一個圓方程式，要如何找到經過圓上某個點 A 的切線方程式？我們利用下面的例子來說明：