

Chapter 5

橢圓

5-1 橢圓的定義



我們看看下面的圖形：

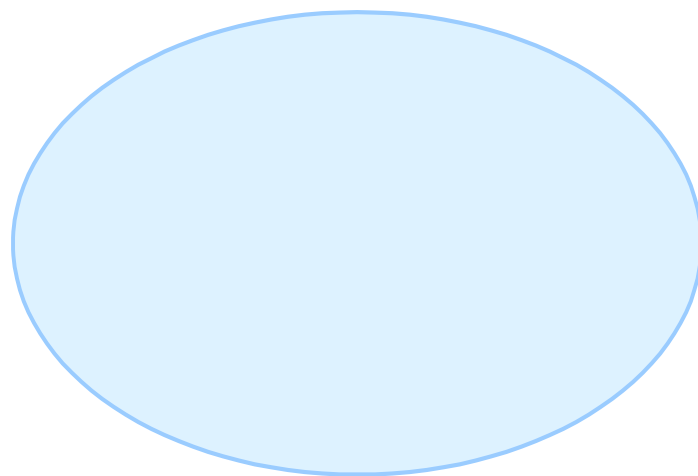


圖5-1

這個圖形，我們稱它做橢圓。它看起來很像壓扁的圓形
再看看下面的圖形：

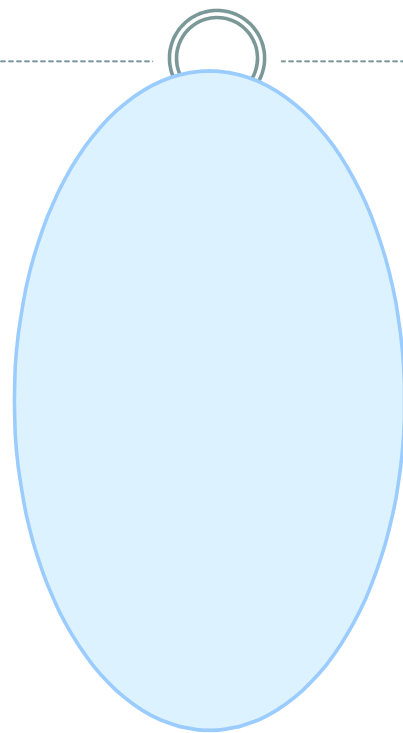


圖5-2

這個圖形跟圖5-1的圖形很像，也叫做橢圓。它很像圖5-1的圖形直立起來。

這樣的圖形，我們要怎麼用數學方程式來表示？

5-2 橢圓的方程式



在上一節裡的例一中，我們得到一個橢圓的方程式：

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

我們稱呼這個形式的方程式為橢圓的標準式。

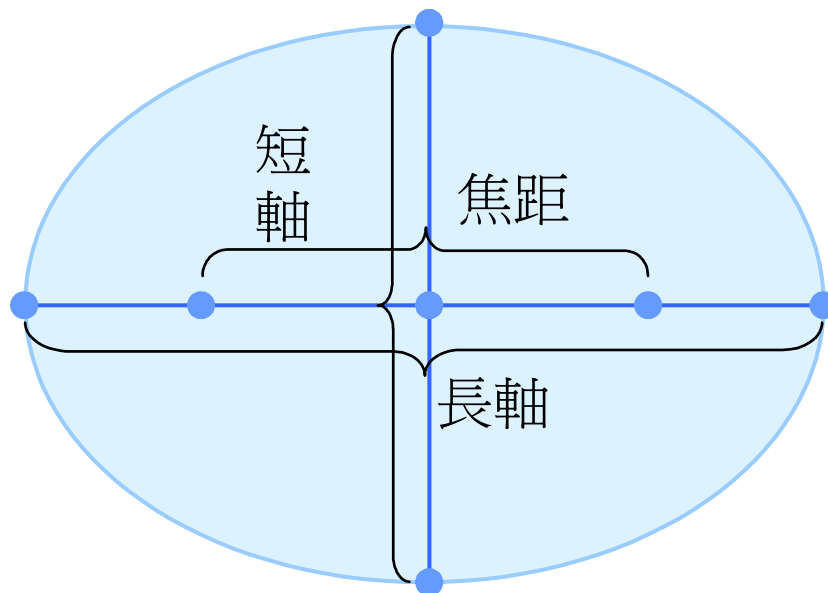
5-2 橢圓的方程式



- 橢圓的標準式

$$1. \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad a > b$$

其中， $2a$ 是長軸， $2b$ 是短軸， $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$ 是焦距

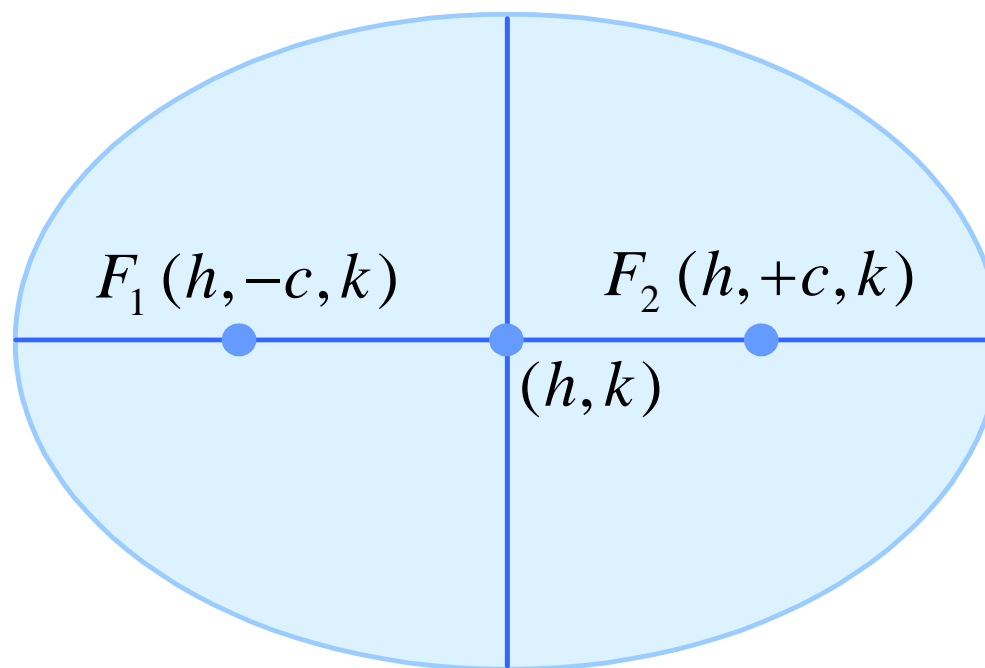


5-2 橢圓的方程式



中心座標是 (h,k) ，焦點座標是 $(h-a,k)$ 、 $(h+a,k)$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

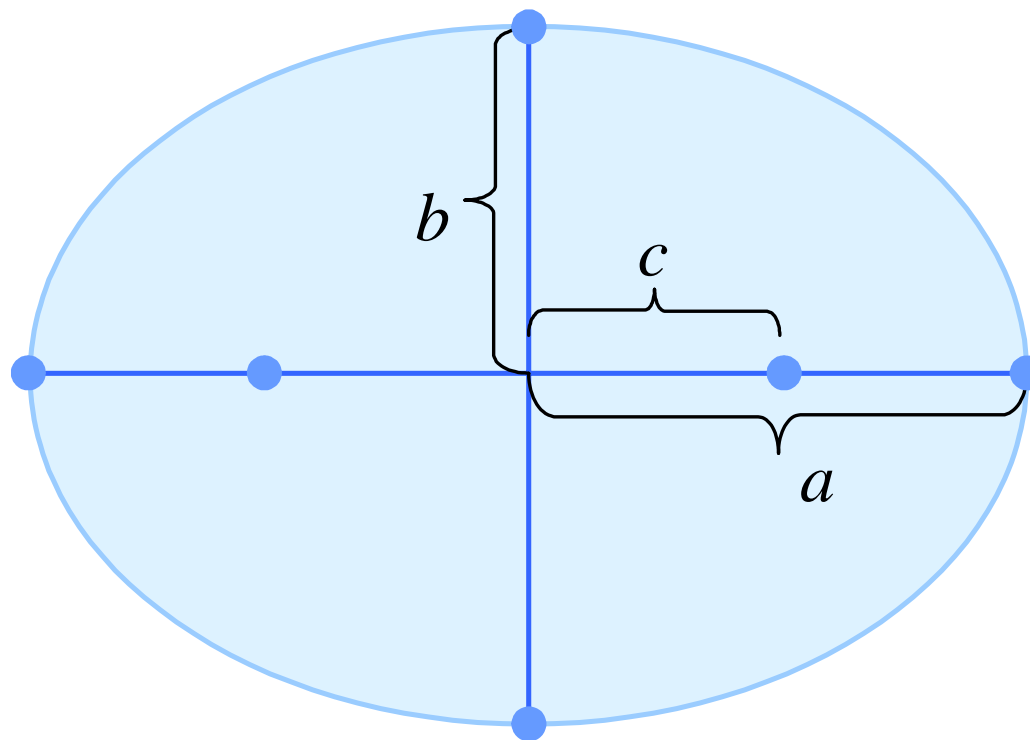


5-2 橢圓的方程式



我們發現：

(1) a 、 b 、 c 三個數字可以用下面的關係式來表示

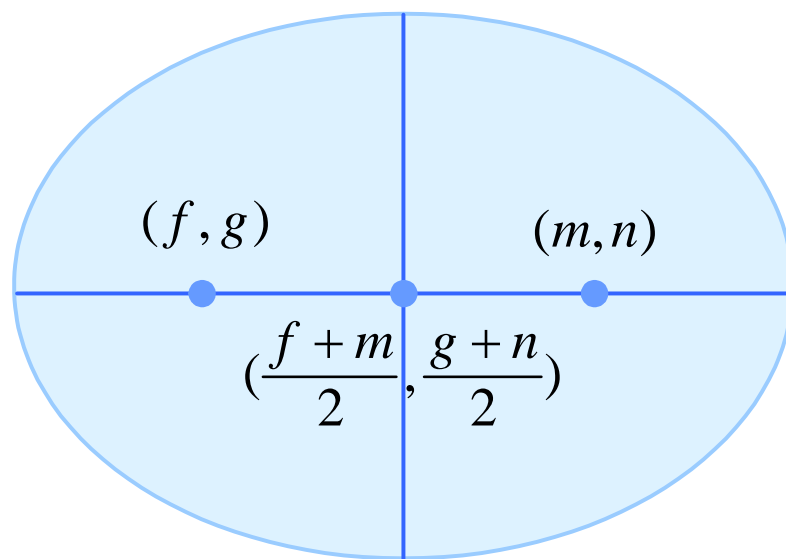


5-2 橢圓的方程式



(2) 橢圓的中心恰好是兩個焦點的中點，也就是說，假如焦點座標分別是 (f, g) 、 (m, n) ，那麼中心座標會是

$$\left(\frac{f+m}{2}, \frac{g+n}{2} \right)$$



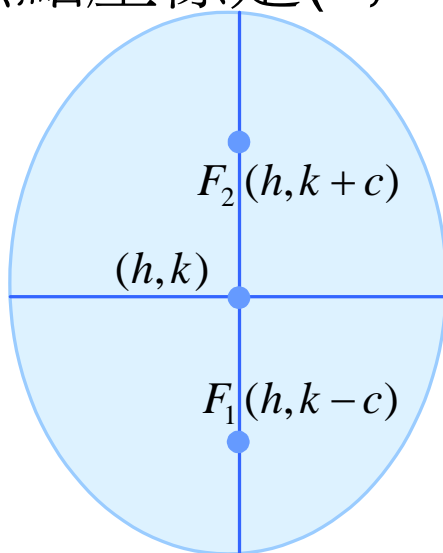
這個圖形的長軸與 x 軸平行，短軸與 y 軸平行。

5-2 橢圓的方程式



$$2. \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad b > a$$

其中， $2b$ 是長軸， $2a$ 是短軸， $2c = 2\sqrt{b^2 - a^2}$ 是焦距
中心座標是 (h, k) ，焦點座標是 $(h, k-b)$ 、 $(h, k+b)$



這個圖形的長軸與 y 軸平行，短軸與 x 軸平行。

5-2 橢圓的方程式



- 橢圓的頂點

橢圓的形狀跟圓很像，這兩個圖形有一個明顯的差異是：如果考慮橢圓上的點到中心的距離關係，我們發現，有兩個點距離中心最遠，有兩個點距離中心最近。而在圓裡，所有的點到中心的距離都是一樣的。

我們也發現，距離中心最遠的兩個點，恰好是長軸的兩個端點；距離中心最近的兩個點，恰好是短軸的兩個端點。

5-2 橢圓的方程式



以標準式1. 來考慮，上面四個點的座標分別是

$(h+a, k)$ 、 $(h-a, k)$ ：最遠的兩個點，

$(h, k+b)$ 、 $(h, k-b)$ ：最近的兩個點。

以標準式2. 來考慮，上面四個點的座標分別是

$(h+b, k)$ 、 $(h-b, k)$ ：最近的兩個點，

$(h, k+b)$ 、 $(h, k-b)$ ：最遠的兩個點。

我們稱這四個點為橢圓的頂點。

5-2 橢圓的方程式



最遠的兩點恰好在長軸的兩端，它們的距離就是長軸長。最近的兩點恰好在短軸的兩端，它們的距離就是短軸長。請看下圖說明：

