

📖 2.1 多項式 (polynomial)

如同 x^2+4x+3 這種由許多個「次方形態」的項加減而成的式子，稱為**多項式**。當 x 演 1 時， x^2+4x+3 是 8；當 x 演 2 時， x^2+4x+3 是 15；代號 x 可以演任何數，而代號的最大次方稱為「次」。

我們也可以用函數來表達： $f(x)=x^2+4x+3$ ；而當要求結果是某一數時，則稱此數學式為「**方程式**」，例如 $f(x)=0$ 或 $x^2+4x+3=0$ ，而此時則須找出 x 該演多少來符合要求。

例如：

$5x+2$ 為一元一次多項式， $5x+2=0$ 為一元一次方程式。

$5x+2=0$ 可以解出 $5x=-2 \Rightarrow x=\frac{-2}{5}$

x^2-5x+2 為一元二次多項式， $x^2-5x+2=0$ 為一元二次方程式。

$2x^3-x^2+7x+2$ 為一元三次多項式， $2x^3-x^2+7x+2=0$ 為一元三次方程式。

$2x+y$ 為二元一次多項式， $2x+y=0$ 為二元一次方程式

$2x+y+z^3$ 為三元三次多項式， $2x+y^4+z^2=0$ 為三元四次方程式。

練習：

寫一個二元二次多項式

寫一個三元一次方程式

一、多項式的四則運算

$$2^2 = 2 \cdot 2 \quad x^2 = x \cdot x$$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad x^3 = x \cdot x \cdot x$$

$$3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad 3x = x + x + x$$

$$2x + 3x = 5x$$

$$x^2 \cdot x^3 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^5$$

練習：

$$3x + 5x =$$

$$-2x + 4x =$$

$$7x - 6x =$$

$$3x^2 + 5x^2 =$$

$$-2x^3 - 4x^3 =$$

$$7x^4 + 6x^4 =$$

$$3x \cdot 5x =$$

$$-2x \cdot 4x =$$

$$7x \cdot 6x =$$

$$x^2 \cdot x =$$

$$-2x^2 \cdot 4x^3 =$$

$$7x^5 \cdot 6x^2 =$$

二、加減法 ~ 同次方的係數相加減

討論： $(x^2 + 3x - 1) + (2x^2 - x + 5) = 3x^2 + 2x + 4$

練習： $(x^2 + 3x - 1) - (2x^2 - x + 5) = -x^2 + 4x - 6$

三、乘法 ~ 一個對一個乘開

討論： $(2+3)(5+1) = 10+2+15+3 = 30$

討論： $(2+3)(5-1) = 10-2+15-3 = 20$

練習： $(x+1)(2x+1) = 2x^2 + 3x + 1$

練習： $(x+1)(2x-1) = 2x^2 + x - 1$

練習： $(x-1)(2x+1) = 2x^2 - x - 1$

練習： $(x-1)(2x-1) = 2x^2 - 3x + 1$

練習： $(x+1)(x+1) = x^2 + 2x + 1$

練習： $(x-1)(x-1) = x^2 - 2x + 1$

練習： $(x+2)(x+2) = x^2 + 4x + 4$

練習： $(x-2)(x-2) = x^2 - 4x + 4$

練習： $(x+3)(x+3) = x^2 + 6x + 9$

練習： $(x-3)(x-3) = x^2 - 6x + 9$

後數 = 中間一半 的2次方

練習： $(x-5)(x-5) = x^2 - 10x + 25$

練習： $(x+10)(x-10) = x^2 - 100$

練習： $(x+6)(x-6) = x^2 - 36$

練習： $(x+3)(x-3) = x^2 - 9$

練習： $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$

練習： $(x^2+3x-1)(2x^2-x+5) = 2x^4 + 5x^3 + 16x - 5$

討論： $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ (正負抵消，只剩頭尾)

練習： $x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

練習： $x^5 - 1 =$

練習： $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1)$

討論： $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

討論： $x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

練習： $x^7 + 1 =$

練習： $x^n + 1 =$

四、除法 ~ 類似一般數字的除法

$$3\overline{)6} = 6 \div 3 = \frac{6}{3} = 6/3 = 2 \Rightarrow 6 = 3 \cdot 2$$

$$3\overline{)7} = 7 \div 3 = \frac{7}{3} = 7/3 \Rightarrow 7 = 3 \cdot 2 + 1$$

$$3\overline{)5} = 5 \div 3 = \frac{5}{3} = 5/3 \Rightarrow 5 = 3 \cdot 1 + 2 = 3 \cdot 2 + (-1)$$

$$3\overline{)46} = 46/3 = 15 \text{ 餘 } 1 \Rightarrow 46 = 3 \cdot 15 + 1$$

$$3\overline{)35} = 35/3 = 11 \text{ 餘 } 2 \Rightarrow 35 = 3 \cdot 11 + 2$$

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

$$\text{被除數} = \text{除數} \cdot \text{倍數} + \text{餘數}$$

$$\text{討論： } \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = x + 1$$

$$\text{討論： } \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = x + 2$$

$$\begin{aligned} \text{討論： } \frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1} &= 2x + 5 \\ \Rightarrow 2x^2 + 3x - 5 &= (x - 1)(2x + 5) \end{aligned}$$

$$\text{討論： } 2x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(2x + 5) + 1$$

$$\text{練習： } 3x^3 + 4x^2 - x + 2 = (x - 2)(3x^2 + 10x + 19) + 40$$

$$\text{練習： } 3x^3 + 4x^2 - x + 2 = (x^2 - 2)(3x + 4) + (5x + 10)$$

$$\text{練習： } 3x^3 + 4x^2 - x + 2 = (x^2 + x - 2)(3x + 1) + (4x + 4)$$

練習： $x^2+3x-12 = (x^2-x+5)(1) + (4x-17)$

練習： $x^4+x^3+x^2+x+1 = (x-1)(x^3+2x^2+3x+4)+(5)$

練習： $x^4+x^3+x^2+x+1 = (x^2+x-1)(x^2+2)+(-x+3)$

練習： $x^4+x^3+x^2+x+1 = (x^3+x^2-x-1)(x) + (2x^2+2x+1)$