

📖 2.2 因式分解

因式分解 ~ 寫成相乘形態

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

考慮在解1次方的問題 $x+1=0$ 時，可以很方便看出 x 該演多少。在考慮 x 該演多少才能讓 x^2+3x+2 是0時，我們可以嘗試把2次方寫成1次方相乘型態來考慮：

$$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$$

因為要二個數字乘起來是0的話，只要其中一個會是0就好了，「因式分解」可以把次方降下來。

在因式分解時，我們可以先把前後項設計好，再考慮中間項

$$x \quad +1$$

$$x \quad +2$$

x 乘 x 得 x^2 ， 2 乘 1 得 2 ， x 乘 1 得 x ， 2 乘 x 得 $2x$ ，總共得到 x^2+3x+2

練習： 分解 $x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$

練習： 分解 $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$

練習： 分解 $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$

練習： 分解 $x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$

討論：分解 $x^2+2x+1 = (x+1)^2$

討論：分解 $x^2-4x+4 = (x-2)^2$

練習：分解 $2x^2 + 3x + 1 = (2x+1)(x+1)$

練習：分解 $2x^2 - x - 3 = (2x-3)(x+1)$

練習：分解 $-x^2-2x+3 = (-x+1)(x+3)$

討論：分解 $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

練習：分解 $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

練習：分解 $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

練習：分解 $x^2 - 25 =$

練習：分解 $x^2 - 16 =$

討論： $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(平方相減可寫作相加乘相減)

討論： $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

每一 $(a+b)$ 項可出 a 或 b 來乘：

(1) 都出 a 可得 a^2 ，共 1 種

(2)有1項出a、另一項出b，可得ab，共2種

(3)都出b可得 b^2 ，共1種

討論： $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

每一 $(a+b)$ 項可出a或b來乘：

(1)都出a可得 a^3 ，共1種

(2)有2項出a、剩下項出b，可得 a^2b ，共3種

(3)有1項出a、剩下項出b，可得 ab^2 ，共3種

(4)都出b可得 b^3 ，共1種

練習： 求 $(a+b)^4$

練習： $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = [a+(-b)][a+(-b)]$

練習： $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

練習： 求 $(a-b)^4$

討論：

$$(x+1)^1 = x+1$$

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+1) = x^2 + 2x + 1$$

$$(x+1)^3 = (x+1)(x+1)(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

每一 $(x+1)$ 項可出x或1來乘：

(1)都出x可得 x^3 ，共1種

(2)有2項出x、剩下項出1，可得 x^2 ，共3種

(3)有1項出x、剩下項出1，可得x，共3種

(4)都出1可得1，共1種

練習： $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

練習：

$$(x-1)^2 =$$

$$(x-1)^3 =$$

$$(x-1)^4 =$$

討論： $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

討論： $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

練習： $a^5 - b^5 =$

練習： $a^n - b^n =$

討論： $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

討論： $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

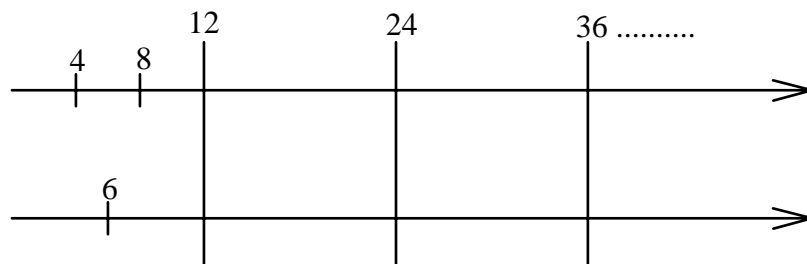
練習： $a^7 + b^7 =$

最大公因數 (greatest common divisor) ~

最多可以讓那一數整除大家

最小公倍數 (lowest common multiple) ~

最快在那一數可以一樣



我們可把 4、6 分解來考慮

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

所以

$$\text{gcd}(4, 6) = 2$$

(共同部分，取每一因數的最少次方)

$$\text{lcm}(4, 6) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

(取每一因數的最多次數，剛好可以涵蓋 $2 \cdot 2$ 及 $2 \cdot 3$)

PS: 把數字分解可以幫我們找出 gcd 及 lcm，稱為「分解法」。

練習：求 36, 150 之 gcd 和 lcm

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

所以

$$\gcd(36,150) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{lcm}(36,150) = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

練習:求 120,216 之 gcd 和 lcm。

練習:求 6,35 之 gcd 和 lcm。

討論: $(x+1)^2(x+2)^3$, $(x+1)(x+3)^2$

$$\gcd = (x+1) \cdots \cdots \cdots \text{共同因式的最小次方}$$

$$\text{lcm} = (x+1)^2(x+2)^3(x+3)^2 \cdots \cdots \text{每個因式的最大次方}$$

練習:求 $(x+1)^3(x-2)^5(x-1)$, $(x+1)(x-1)^3$ 之 gcd 和 lcm。

練習:求 $(x+3)^4(3x-1)^2(x+7)$, $(x+3)(x+7)^3$ 之 gcd 和 lcm。

練習:求 x^2-3x+2 , x^2-4x+3 之 gcd 和 lcm。

練習:求 x^2+3x+2 , x^2-4x+3 之 gcd 和 lcm。

討論: 4,6,18

$$\text{因為 } 4 = 2 \cdot 2 = 2^2$$

$$6 = 2 \cdot 3 = 2^1 \cdot 3^1$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^1 \cdot 3^2$$

所以

$$\gcd(4,6,18) = 2^1 = 2$$

$$\text{lcm}(4,6,18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

練習：求 120, 234, 300 之 gcd 和 lcm。

練習： $f(x) = (x+1)^2 (3x-1)^3$

$$g(x) = (x+1)^3 (3x-1)^2$$

$$h(x) = (x+1)^4 (3x-1)$$

求 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 三式之 gcd 和 lcm。

📖 2.3 餘式定理

餘數性質 ~ 設定 x 值使「除式為0」，帶入 x 直到被除式計算可得餘數。

討論: 求以 $x+1$ 除 $3x+5$ 的餘數

$$3x+5 = (x+1) \cdot \text{倍數} + \text{餘數} \dots\dots\dots (1)$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

設定 $x = -1$ 代入 (1) 可得 $3(-1)+5 = 0 \cdot (\text{倍數}) + \text{餘數}$
 \Rightarrow 餘數 = 2

討論: 求以 $x-1$ 除 (x^2+2x+3) 的餘數

$$x^2 + 2x + 3 = (x-1) \cdot \text{倍數} + \text{餘數} \dots\dots\dots (1)$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

設定 $x = 1$ 代入 (1) 可得 $1+2+3 = 0 \cdot (\text{倍數}) + \text{餘數}$
 \Rightarrow 餘數為 6

練習: 求以 $x+1$ 除 (x^2+2x+3) 的餘數

練習: 求以 $x-2$ 除 (x^2+2x+3) 的餘數

練習: 求以 $x-3$ 除 (x^2+2x+3) 的餘數

練習: 求以 $x+1$ 除 (x^2-2x+5) 的餘數

練習:求以 $(x-2)$ 除 (x^2+3x-1) 的餘數

練習:求以 $x-1$ 除 $(x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)$ 的餘數

討論:求以 $(x+1)$ 除 (x^2+2) 的餘數 $= (-1)^2 + 2 = 3$

7除 $6^2 + 2$ 餘3； 8除 $7^2 + 2$ 餘3； 9除 $8^2 + 2$ 餘3；

5除 $4^2 + 2$ 餘3； 4除 $3^2 + 2$ 餘3

討論:求以 $(x-1)$ 除 $(x^{1997}-1)$ 、 x^{1997} 、 $(x^{1997}+1)$ 、 $(x^{1997}+2)$ 的餘數。

$x=1 \Rightarrow (1)0 \quad (2)1 \quad (3)2 \quad (4)3$

討論:求以3除 $(4^{1997}-1)$ 、 4^{1997} 、 $(4^{1997}+1)$ 、 $(4^{1997}+2)$ 的餘數。

$x=4 \Rightarrow (1)0 \quad (2)1 \quad (3)2 \quad (4)3$

練習:求以4除 $(5^{1997}-1)$ 的餘數。

練習:求以 $(x+1)$ 除 $(x^{1997}-1)$ 的餘數。

練習:求以3除 $(2^{1997}-1)$ 的餘數。

練習:求以7除 $(6^{99998}+5)$ 的餘數。

討論:求以3除 $(5^{1997}+1)$ 的餘數。

$$\text{以 } x-2 \text{ 除 } (x^{1997}-1) \text{ 的餘數} = 2^{1997}-1$$

$$\Rightarrow 3 \text{ 除 } (5^{1997}-1) \text{ 餘 } 2^{1997} - 1$$

$$\Rightarrow 3 \text{ 除 } (2^{1997}-1) \text{ 餘 } -2 \text{ (or } 1)$$