

第 5 章 函數的概念與圖形

5.1 函數 (function)

一、函數的意義：種因得果的規則

給同學一個任務：「把給你的數字都處理成平方」，則把 1 給你後會處理成多少？把 2 給你後會處理成多少？把 -1 給你後會處理成多少？把 1/2 給你後會處理成多少？把 0.3 給你後會處理成多少？我們可以簡潔的表達這個規則(因果關係)嗎？

因	函數 f	果
1	----->	$1 = f(1)$
2	----->	$4 = f(2)$
3	----->	$9 = f(3)$
-1	----->	$1 = f(-1)$
1/2	----->	$1/4 = f(1/2)$
0.3	----->	$0.09 = f(0.3)$
x	----->	$x^2 = f(x)$
y	----->	$y^2 = f(y)$
t	----->	$t^2 = f(t)$

x	x 表示因，又稱為變數或因素，變數就是可以自由變動而等待決定的數，可以演任何數
f	f 是自定的函數名稱，表示「處理者」的意思
f(x)	f(x)表示果，也就是種 x 這個因，經由函數 f 處理後所得的結果，又稱為「函數值」
$f(x)=x^2$	表達平方函數因果之間的關係或種因得果的規則

討論： 速度函數 ~ 不同時間可能有不同的速度

例如車子行進時，在不同時間可能有不同的速度，速度隨著時間而不同，在每一時間 t 有當時對應的速度 $V(t)$

$$V(t)=2 \quad \Rightarrow V(1)=2, \quad V(2)=2, \quad V(3)=2, \dots$$

速度一直維持是2(等速度行駛)

$$V(t)=2t \quad \Rightarrow V(1)=2, \quad V(2)=4, \quad V(3)=6, \dots$$

速度隨著時間增大而變大，而且是時間的2倍

$$V(t)=3t^2 \quad \Rightarrow V(1)=3, \quad V(2)=12, \quad V(3)=27, \dots$$

速度隨著時間增大而變大，而且是時間平方的3倍

練習： 當 $x=-5, -3, 0, 3, 5$ 時計算下列各函數的函數值

1. $f(x) = x^2$

$$f(-5)=25 \quad , \quad f(-3)=9 \quad , \quad f(0)=0 \quad , \quad f(3)=9 \quad , \quad f(5)=25$$

2. $g(x) = 3x$

3. $h(3t) = 3t + 1$

4. $f(x) = 2x + 1$

5. $f(x) = x^2 + 1$

6. $f(x) = x^3$

7. $f(x) = 1/x$

8. $f(x) = \frac{1}{x-5}$

9. $f(x) = \sqrt{x-5}$

10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$

二、函數的**定義域**(可以種的因)與**值域**(可看到的結果)：

買0.38個或-3個蘋果是不合理的，所以買蘋果函數能種的因要合理才行。全部可以種的因的集合稱為「定義域」(domain)，全部可以看到的結果的集合稱為「值域」(range)，域是範圍的意思

函數	定義域	值域
買蘋果函數 $f(x)=2x$	domf = {0,1,2,3,...}	ranf = {0,2,4,6,8,...}
平方函數 $f(x)=x^2$	domf= R	ranf = $[0, \infty)$
$f(x)=2x+1$	domf=	ranf =
$f(x)=x^2+1$	domf=	ranf =
$f(x)=x^3$	domf=	ranf =
$f(x)=\frac{1}{x}$	domf= $\mathbb{R}-\{0\}$	ranf= $\mathbb{R}-\{0\}$
$f(x)=\frac{2}{5x}$	domf=	ranf =
$f(x)=\frac{1}{x-5}$	domf=	ranf =
$f(x)=\sqrt{x}$	domf= $[0, \infty)$	ranf= $[0, \infty)$
$f(x)=\sqrt{x-5}$	domf=	ranf =
$f(x)=\sqrt{x-5}$	domf=	ranf =
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-5}}$	domf=	ranf =
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-7}}$	domf=	ranf =

結論：函數的定義域要考慮分數的分母不可以是0，根號內不可以是負數

三、合成(組合)函數 ~

一步步處理得到最後結果(連鎖因果關係)

討論: 3個同學玩遊戲：第1人負責把數字處理成平方、第2人負責把數字乘3、第3人負責把數字加1。老師把5交給第一位同學，經三位同學處理後，最後得到什麼？老師把任一數 x 交給第一位同學，經三位同學處理後，最後得到什麼？

因	---	一果	---	二果	---	三果
5	---	25	---	75	---	76
3	---		---		---	
-1	---		---		---	
x	---	x^2	---	$3x^2$	---	$3x^2 + 1$

我們可用函數來表達3位同學所做的工作：

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 3x, \quad h(x) = x+1$$

	f		g		h	
因	---	一果	---	二果	---	三果
5	---	25	---	75	---	76
x	---	x^2	---	$3x^2$	---	$3x^2 + 1$

$$f(5) = 25, \quad g(25) = 75, \quad h(75) = 76$$

$$h(g(f(5))) = h(g(25)) = h(75) = 76$$

$$f(x) = x^2, \quad g(x^2) = 3x^2, \quad h(3x^2) = 3x^2 + 1$$

$$h(g(f(x))) = h(g(x^2)) = h(3x^2) = 3x^2 + 1$$

討論：

$$f(g(h(5))) = f(g(5+1)) = f(g(6)) = f(18) = 18^2 = 324$$

$$h(f(g(1))) = h(f(3)) = h(3^2) = h(9) = 9+1 = 10$$

練習：

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 3x, \quad h(x) = x+1$$

$h(f(g(2)))$	$h(f(g(x)))$
$f(g(h(2)))$	$f(g(h(x)))$
$f(h(g(2)))$	$f(h(g(x)))$
$g(h(f(2)))$	$g(h(f(x)))$
$g(f(h(2)))$	$g(f(h(x)))$

📖 5.2 函數的圖形 (graph)

描點

函數是種因得果，而平面上的點有2個坐標，如果把因放第1(x)坐標，種這個因所得的果放第2(y)坐標則可以在平面上畫點，而點畫得愈多則愈容易看到整個圖形的實際形狀

函數 $f(x)$

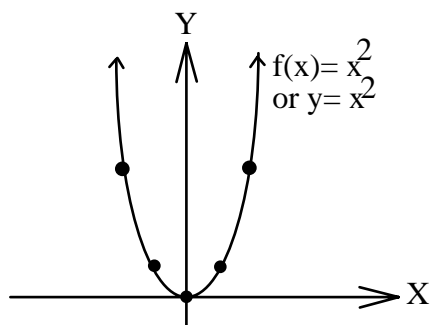
圖形點 = (因 , 果) = $(x, f(x))$

討論：平方函數 $f(x) = x^2$ 的圖形

因 x	0	1	-1	2	-2	3	-3
果 f(x)	0	1	1	4	4	9	9

種0得0所以在(0,0)描一點、種1得1所以在(1,1)描一點、種 -1得1所以在(-1,1)描一點、種2得4所以在(2,4)描一點、種 -2得4所以在(-2,4)描一點。

一直種因得果描點下去，描的點愈多，愈能看出平方函數的圖形是一條曲線，稱為平方函數的圖形。(不是只描幾個點後把這些點用直線連起來)



在標示函數圖形時，可採用函數型標示法 $f(x) = x^2$ ，或坐標型標示法 $y = x^2$ ，表示在這條曲線上的點有共同的特徵：

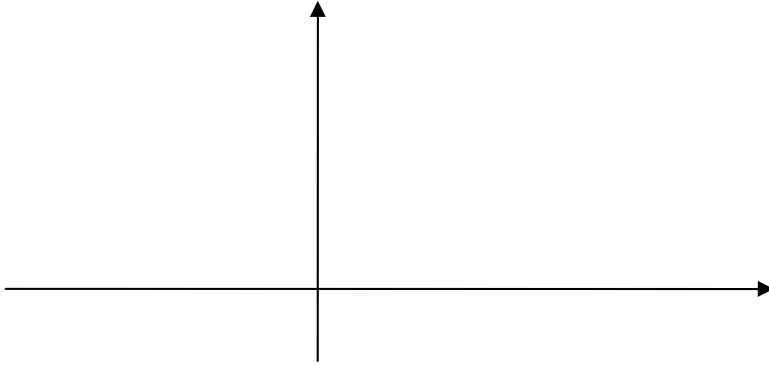
y 坐標剛好會是 x 坐標的 2 次方

討論：(4,16)在曲線上，(4,15)在曲線下方，(4,17)在曲線上方

一、常數函數

討論： $f(x) = 5$ 圖形

因 x	-3	-2	-1	0	1	2	3
果 $f(x)=5$	5	5	5	5	5	5	5



練習： $f(x) = 2$ 圖形

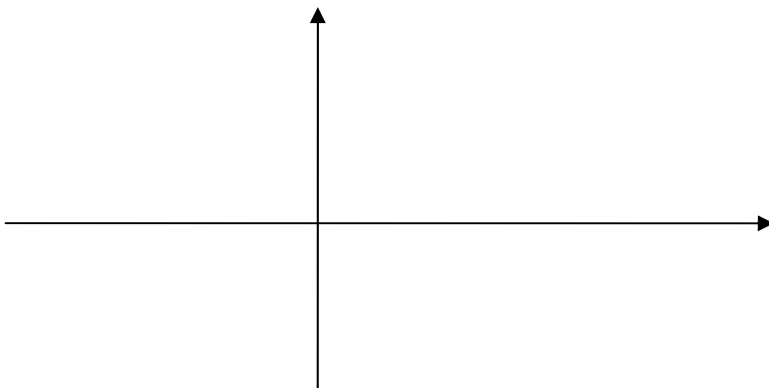
練習： $f(x) = -3$ 圖形

二、一次函數

討論： $f(x) = x - 1$

x 演不同的值， $x-1$ 就有不同的結果

因 x	-3	-2	-1	0	1	2	3
果 $f(x)=x-1$	-4	-3	-2	-1	0	1	2



練習： $f(x) = x$ 圖形

練習： $f(x) = 2x$ 圖形

練習： $f(x) = 2x + 1$ 圖形

練習： $f(x) = 3x$ 圖形

練習： $f(x) = -x$ 圖形

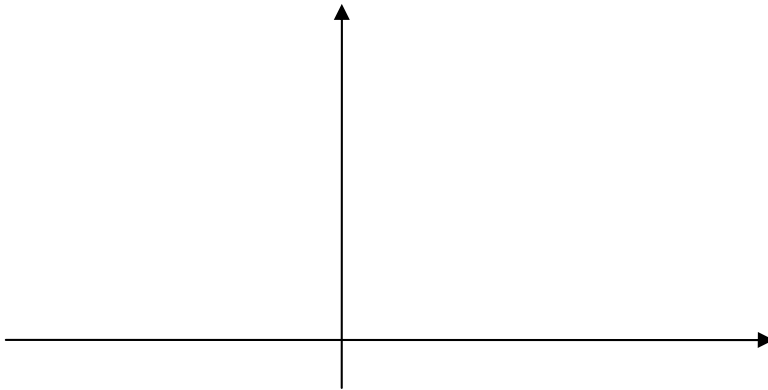
練習： $f(x) = -2x$ 圖形

練習： $f(x) = -2x + 1$ 圖形

三、二次函數

討論：平方函數 $f(x) = x^2$ 的圖形

因 x	0	1	-1	2	-2	3	-3
果 $f(x)$	0	1	1	4	4	9	9



練習： $f(x) = x^2 + 4$ 圖形 (x^2 圖形上移4)

練習： $f(x) = (x-1)^2$ 圖形 (x^2 圖形右移1)

練習： $f(x) = (x-1)^2 + 4$ 圖形 (x^2 圖形右移1後上移4)

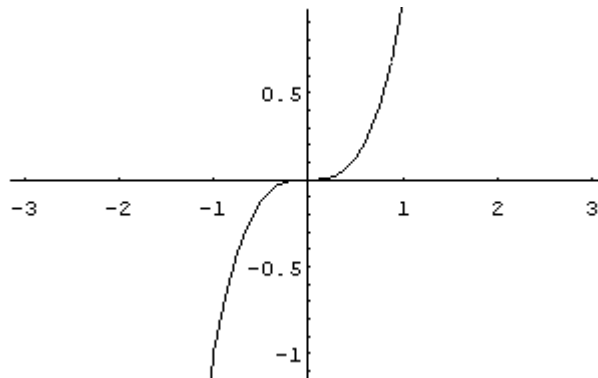
練習： $f(x) = -x^2$ 圖形 (x^2 圖形上下顛倒)

四、其他函數

練習： $f(x) = |x|$ 圖形

討論： $f(x) = x^3$ 圖形

因 x	0	1	-1	2	-2	3	-3
果 $f(x)$	0	1	-1	8	-8	27	-27



練習： $f(x) = \frac{1}{x}$ 的圖形

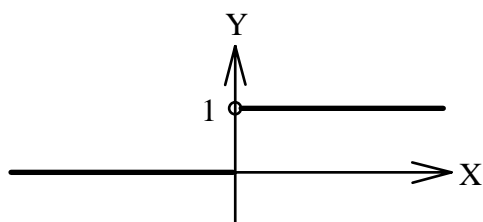
練習： $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 的圖形

練習： $f(x) = \sqrt{x}$ 的圖形

練習： $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ 的圖形

(圓心在原點且半徑是2的圓上半部)

討論： $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq 0 \\ 1, & \text{if } x > 0 \end{cases}$ 圖形



練習： $f(x) = \begin{cases} 5, & x \leq 1 \\ -3, & x > 1 \end{cases}$ 圖形

練習： $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$ 圖形

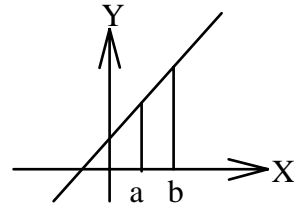
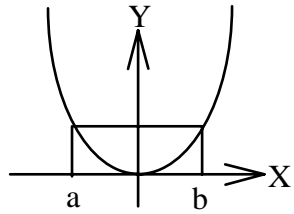
練習： 高斯 (gauss) 符號 $[x]$ = 不能超過 x 的最大整數

例 $[3.4]=3$, $[1.3]=1$, $[0.1]=0$, $[-0.1]= -1$, $[-2.5]= -3$

，畫 $f(x) = [x]$ 圖形

五、1對1函數：種不同因會得不同果

$f(x)=x^2$ 不是 1-1 ， $f(x)=x+1$ 是 1-1



可如此描述 1-1 函數：

若 $a \neq b$ 則 $f(a) \neq f(b)$ (不同因得不同果)

或 若 $f(a)=f(b)$ 則 $a=b$ (果同則因必同)

練習： $f(x)=x^3$ 是 1-1 函數嗎？ $f(x)=x^4$ 是 1-1 函數嗎？

📖 5.3 多變數函數

(function of several variables)

許多因合力影響果

學期總成績受到期中成績、期末成績2個因素的影響， x 代表期中成績，佔學期總成績的40%； y 代表期末成績，佔學期總成績的60%

因 果

$$(x,y) \text{ -----} > 0.4x+0.6y$$

$$f(x,y) = 0.4x+0.6y \quad \text{2變數函數(果受2因素影響)}$$

當期中成績50分，期末成績80分，則學期總成績是

$$f(50,80) = (50)(0.4) + (80)(0.6) = 68$$

其中因素 x 與 y 互不影響，期中成績不影響期末成績，期末成績不影響期中成績

練習：期中佔30%，期末佔40%，平時佔30%，用函數表示學期總成績的算法

練習：期中成績50分，期末成績80分，平時成績90分，算學期總成績

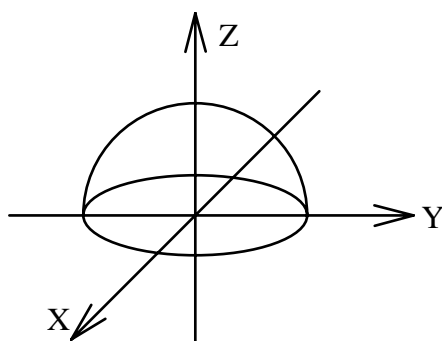
練習：當一廠商投資在生產的錢是 x ，且投資在廣告的錢是 y 時，此時可得的利潤是 $x^2 y^3$ ，以函數表達

2 變數函數 $f(x,y)$ 的圖形：

如同 1 變數函數的圖形，前坐標放因，後坐標放果，我們得到 $(x, y, f(x,y))$ 來描點，所以 2 變數函數的圖形會畫在 3 度空間上。

一般來講，2 變數函數的圖形類似曲面的形態，例如立起來的雨傘表面，或室內體育館的屋頂曲面，每一個坐位頭頂的高度可能不一樣，也就是屋頂高度是由坐在地面上的位置決定的：

討論： $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$



$$f(0,0) =$$

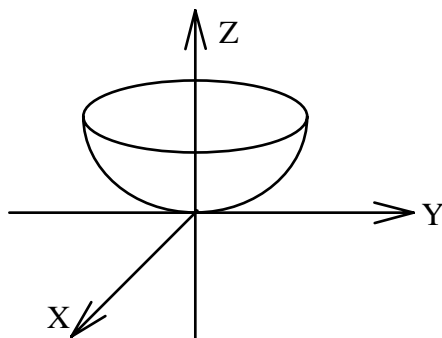
$$f(0,2) =$$

$$f(2,0) =$$

$$f(1,1) =$$

$$f(-2,0) =$$

討論： $f(x,y) = x^2 + y^2$



使用 $(0,0)$ ， $(1,1)$ $(2,2)$ ， $(-2,-1)$ 求函數值

討論：健康的函數可能的因有哪些？