

第 5 章 函數的概念與圖形

5.1 函數 (function)

一、函數的意義：種因得果的規則

給同學一個任務：「把給你的數字都處理成平方」，則把 1 給你後會處理成多少？把 2 給你後會處理成多少？把 -1 給你後會處理成多少？把 $1/2$ 給你後會處理成多少？把 0.3 給你後會處理成多少？我們可以簡潔的表達這個規則(因果關係)嗎？

因	函數 f	果
1	----->	$1 = f(1)$
2	----->	$4 = f(2)$
3	----->	$9 = f(3)$
-1	----->	$1 = f(-1)$
$1/2$	----->	$1/4 = f(1/2)$
0.3	----->	$-0.09 = f(0.3)$
x	----->	$x^2 = f(x)$
y	----->	$y^2 = f(y)$
t	----->	$t^2 = f(t)$

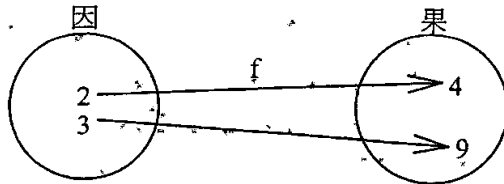
x	x 表示因，又稱為變數或因素，變數就是可以自由變動而等待決定的數，可以演任何數
f	f 是自定的函數名稱，表示「處理者」的意思
f(x)	f(x) 表示果，也就是種 x 這個因，經由函數 f 處理後所得的結果，又稱為「函數值」
$f(x)=x^2$	表達平方函數因果之間的關係或種因得果的規則

PS: 我們可以用任何代號來做爲因與函數的名稱，例如：

$$f(x) = x^2, \quad f(y) = y^2, \quad f(t) = t^2, \quad g(n) = n^2, \quad h(s) = s^2$$

符號雖不同，但是表示同一規則：

「種什麼就得什麼的平方」



練習：寫出3次方函數

練習：買蘋果一個10元，買蘋果的個數是因，該付的金額是果，寫出「買蘋果函數」

討論：位置函數 ~ 不同時間在不同位置

因

果

時間 -----> 位置

例如開車直線前進，或螞蟻在一條直線上行走，不同時間會在不同的位置，我們可以用函數來表示在時間 t 時的位置 $S(t)$

$$S(t) = 2t \quad \Rightarrow \quad S(0) = 0, \quad S(1) = 2, \quad S(2) = 4, \quad S(2.5) = 5$$

$$S(t) = 3t \quad \Rightarrow \quad S(0) = 0, \quad S(1) = 3, \quad S(2) = 6, \quad S(2.5) = 7.5$$

$$S(t) = 2t + 1 \quad \Rightarrow \quad S(0) = 1, \quad S(1) = 3, \quad S(2) = 5, \quad S(2.5) = 6$$

$$S(t) = t^2 \quad \Rightarrow \quad S(0) = 0, \quad S(1) = 1, \quad S(2) = 4, \quad S(3) = 9, \dots$$

$$S(t) = t^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad S(0) = 1, \quad S(1) = 2, \quad S(2) = 5, \quad S(3) = 10$$

$$S(t) = t^3 \quad \Rightarrow \quad S(0) = 0, \quad S(1) = 1, \quad S(2) = 8, \quad S(3) = 27$$

討論：速度函數 \sim 不同時間可能有不同的速度

例如車子行進時，在不同時間可能有不同的速度，速度隨著時間而不同，在每一時間 t 有當時對應的速度 $V(t)$

$$V(t)=2 \quad \Rightarrow V(1)=2, \quad V(2)=2, \quad V(3)=2, \dots$$

速度一直維持是2(等速度行駛)

$$V(t)=2t \quad \Rightarrow V(1)=2, \quad V(2)=4, \quad V(3)=6, \dots$$

速度隨著時間增大而變大，而且是時間的2倍

$$V(t)=3t^2 \quad \Rightarrow V(1)=3, \quad V(2)=12, \quad V(3)=27, \dots$$

速度隨著時間增大而變大，而且是時間平方的3倍

練習：當 $x=-5, -3, 0, 3, 5$ 時計算下列各函數的函數值

1. $f(x) = x^2$

$$f(-5)=25, \quad f(-3)=9, \quad f(0)=0, \quad f(3)=9, \quad f(5)=25$$

2. $g(x) = 3x$ $g(-5)=-15, \quad g(-3)=-9, \quad g(0)=0, \quad g(3)=9, \quad g(5)=15$

3. $h(t) = 3t + 1$ $h(-5)=-14, \quad h(-3)=-8, \quad h(0)=1, \quad h(3)=10, \quad h(5)=16$

4. $f(x) = 2x + 1$ $f(-5)=-9, \quad f(-3)=-5, \quad f(0)=1, \quad f(3)=7, \quad f(5)=11$

5. $f(x) = x^2 + 1$ $f(-5)=26, \quad f(-3)=10, \quad f(0)=1, \quad f(3)=10, \quad f(5)=26$

6. $f(x) = x^3$ $f(-5)=-125, \quad f(-3)=-27, \quad f(0)=0, \quad f(3)=27, \quad f(5)=125$

7. $f(x) = 1/x$ $f(-5)=-\frac{1}{5}, \quad f(-3)=-\frac{1}{3}, \quad f(0)$ 不存在, \because 分母不可以為0, $f(3)=\frac{1}{3}, \quad f(5)=\frac{1}{5}$

8. $f(x) = \frac{1}{x-5}$ $f(-5)=-\frac{1}{10}, \quad f(-3)=-\frac{1}{8}, \quad f(0)=-\frac{1}{5}, \quad f(3)=-\frac{1}{2}, \quad f(5)$ 不存在.

9. $f(x) = \sqrt{x-5}$ $f(-5), f(-3), f(0), f(3)$ 皆無意義, \because 根號內必須 ≥ 0
 $f(5) = \sqrt{5-5} = \sqrt{0} = 0$

10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$ 根號內必須 ≥ 0 , 分母不可等於0.

$\therefore x=-5, -3, 0, 3, 5$ 時, 函數值皆不存在

二、函數的定義域(可以種的因)與值域(可看到的結果)：

買0.38個或-3個蘋果是不合理的，所以買蘋果函數能種的因要合理才行。全部可以種的因的集合稱為「定義域」(domain)，全部可以看到的結果的集合稱為「值域」(range)，域是範圍的意思

函數	定義域	值域
買蘋果函數 $f(x)=2x$	$\text{dom}f = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	$\text{ran}f = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$
平方函數 $f(x) = x^2$	$\text{dom}f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	$\text{ran}f = [0, \infty)$
$f(x) = 2x+1$	$\text{dom}f = (-\infty, \infty)$	$\text{ran}f = (-\infty, \infty)$
$f(x) = x^2 + 1$	$\text{dom}f = (-\infty, \infty)$	$\text{ran}f = [1, \infty)$
$f(x) = x^3$	$\text{dom}f = (-\infty, \infty)$	$\text{ran}f = (-\infty, \infty)$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\text{dom}f = \mathbb{R} - \{0\}$	$\text{ran}f = \mathbb{R} - \{0\}$
$f(x) = \frac{2}{5x}$	$\text{dom}f = \mathbb{R} - \{0\}$	$\text{ran}f = \mathbb{R} - \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x-5}$	$\text{dom}f = \mathbb{R} - \{5\}$	$\text{ran}f = \mathbb{R} - \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\text{dom}f = [0, \infty)$	$\text{ran}f = [0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{x-5}$	$\text{dom}f = [5, \infty)$	$\text{ran}f = [0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{x-7}$	$\text{dom}f = [7, \infty)$	$\text{ran}f = [0, \infty)$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$	$\text{dom}f = (5, \infty)$	$\text{ran}f = (0, \infty)$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-7}}$	$\text{dom}f = (7, \infty)$	$\text{ran}f = (0, \infty)$

結論：函數的定義域要考慮分數的分母不可以是0，根號內不可以是負數

三、合成(組合)函數 ~

一步步處理得到最後結果(連鎖因果關係)

討論: 3個同學玩遊戲: 第1人負責把數字處理成平方、第2人負責把數字乘3、第3人負責把數字加1。老師把5交給第一位同學, 經三位同學處理後, 最後得到什麼? 老師把任一數 x 交給第一位同學, 經三位同學處理後, 最後得到什麼?

因	---	>	一果	---	>	二果	---	>	三果
5	---	>	25	---	>	75	---	>	76
3	---	>	9	---	>	27	---	>	28
-1	---	>	1	---	>	3	---	>	4
x	---	>	x^2	---	>	$3x^2$	---	>	$3x^2 + 1$

我們可用函數來表達3位同學所做的工作:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 3x, \quad h(x) = x + 1$$

	f		g		h				
因	---	>	一果	---	>	二果	---	>	三果
5	---	>	25	---	>	75	---	>	76
x	---	>	x^2	---	>	$3x^2$	---	>	$3x^2 + 1$

$$f(5) = 25, \quad g(25) = 75, \quad h(75) = 76$$

$$h(g(f(5))) = h(g(25)) = h(75) = 76$$

$$f(x) = x^2, \quad g(x^2) = 3x^2, \quad h(3x^2) = 3x^2 + 1$$

$$h(g(f(x))) = h(g(x^2)) = h(3x^2) = 3x^2 + 1$$

討論:

$$f(g(h(5))) = f(g(5+1)) = f(g(6)) = f(18) = 18^2 = 324$$

$$h(f(g(1))) = h(f(3)) = h(3^2) = h(9) = 9 + 1 = 10$$

練習:

$f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$, $h(x) = x+1$

1.	$h(f(g(2)))$	$h(f(g(x)))$
2.	$f(g(h(2)))$	$f(g(h(x)))$
3.	$f(h(g(2)))$	$f(h(g(x)))$
4.	$g(h(f(2)))$	$g(h(f(x)))$
5.	$g(f(h(2)))$	$g(f(h(x)))$

1. $h(f(g(2)))$
 $= h(f(6))$
 $= h(36)$
 $= 37$

6. $h(f(g(x)))$
 $= h(f(3x))$
 $= h(9x^2)$
 $= 9x^2 + 1$

2. $f(g(h(2)))$
 $= f(g(3))$
 $= f(9)$
 $= 81$

2. $f(g(h(x)))$
 $= f(g(x+1))$
 $= f(3x+3)$
 $= (3x+3)^2$

10. $g(f(h(x)))$
 $= g(f(x+1))$
 $= g(x+1)^2$
 $= 3(x+1)^2$

3. $f(h(g(2)))$
 $= f(h(6))$
 $= f(7)$
 $= 49$

8. $f(h(g(x)))$
 $= f(h(3x))$
 $= f(3x+1)$
 $= (3x+1)^2$

4. $g(h(f(2)))$
 $= g(h(4))$
 $= g(5)$
 $= 15$

9. $g(h(f(x)))$
 $= g(h(x^2))$
 $= g(x^2+1)$
 $= 3x^2 + 3$

5. $g(f(h(2)))$
 $= g(f(3))$
 $= g(9)$
 $= 27$