

五專數學（二）

1.1 直線的斜率

1.2 直線方程式

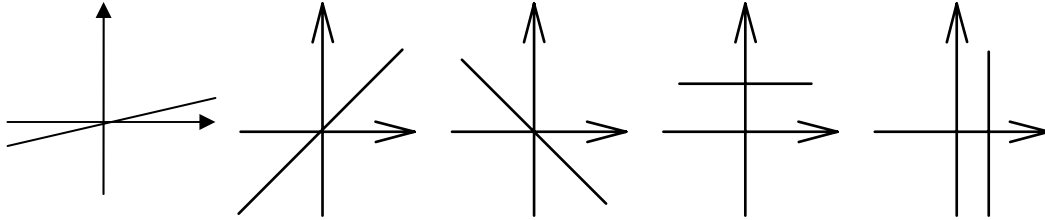
1.3 直線的交點：解二元一次聯立方程式

1.4 點與直線的關係

班級：_____ 姓名：_____ 學號：_____

📖 1.1 直線的斜率

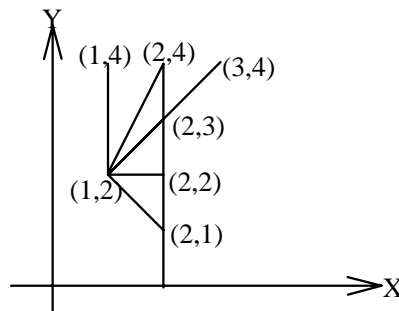
直線的特徵 ~ 傾斜程度(坡度)(陡度)(斜率)



我們應數量化來客觀形容直線的傾斜程度，如打分數一樣，並且打分數的方法要合理，合乎我們基本的認知，例如上坡時斜率應是正的；下坡時斜率是負的；而平的時候，斜率應該不正不負，也就是0。而且陡度愈大，斜率值應愈大

二點決定了一條直線，而這條直線的斜率定為：

$$\text{斜率 } m = \frac{\text{第二}(y)\text{座標變動量}}{\text{第一}(x)\text{座標變動量}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{高度的變化量是水平變動量的幾倍}$$

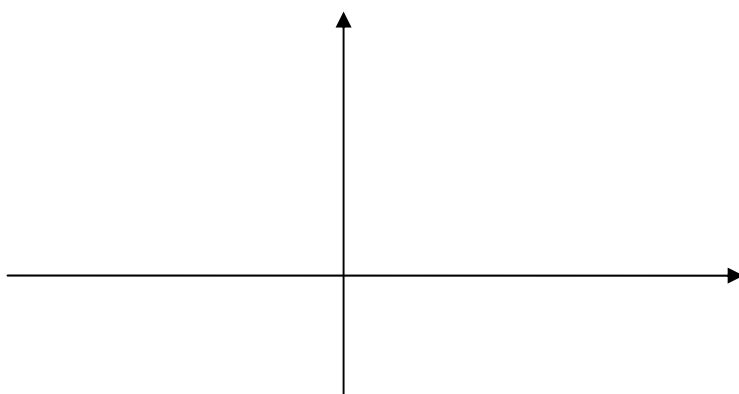


二點	二點所成直線的斜率
(1,2), (2,4)	$\frac{4-2}{2-1} = 2$
(1,2), (3,6)	$\frac{6-2}{3-1} = 2$
(1,2), (4,8)	$\frac{8-2}{4-1} = 2$
(1,2), (3,4)	$\frac{4-2}{3-1} = 1$

(1,2), (2,3)	_____ =
(3,4), (99,100)	_____ =
(1,2), (2,2)	_____ = 0
(1,2), (2,1)	_____ = -1
(0,1), (-1,0)	_____ = 1
(1,2), (1,4)	$\frac{4-2}{1-1} = \frac{2}{0} = \text{無意義}$

結論：

- (1)斜率是 k 表示 y 坐標的變動量固定是 x 坐標變動量的 k 倍
- (2)如果斜率是正值，表示是一條上升直線，當x值增加時y值會跟著增加，且y增加量會是x增加量的斜率倍
- (3)如果斜率是負值，表示是一條下降直線，當x值增加時y值會減少
- (4)如果斜率是0，表示是一條水平直線，y值是固定的
- (5)如果斜率不存在，表示是一條垂直直線，x值是固定的



練習：斜率是2的直線有多少？

練習：通過點(1,2)的直線有多少？

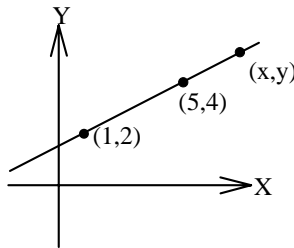
1.2 直線的方程式

直線的方程式(特徵式) ~ 考慮斜率與通過點

一、已知線上兩點的直線(兩點式) ~

線上任意二點算出來的斜率與已知二點所算出來的斜率會一樣(不在直線上的點所算出來的斜率不會一樣)

討論: 過點(1,2),(5,4)的直線



$$(1,2) \text{ 與 } (x,y) \text{ 的斜率} = \frac{y-2}{x-1}, \quad (1,2) \text{ 與 } (5,4) \text{ 的斜率} = \frac{4-2}{5-1}$$

$$\begin{aligned} \text{兩斜率應相同 所以 } \frac{y-2}{x-1} &= \frac{4-2}{5-1} \Rightarrow \frac{y-2}{x-1} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{y-2}{x-1} = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow x-1 = 2y-4 \Rightarrow x-2y+3 = 0 \end{aligned}$$

在線上任何一點的 x 坐標與 y 坐標代入方程式都可使等號成立；而不在線上的點代入則等號不會成立。所以方程式可以判定那些點在線上，那些不在線上

$x = 13, y = 8$ 代入 $x - 2y + 3 = 13 - 2 \cdot 8 + 3 = 13 - 16 + 3 = 0$ 符合方程式的要求，所以

(13,8) 這個點在 $x - 2y + 3 = 0$ 這條線上

練習: 點(11,7)會在線上嗎? (11,8)、(11,5)呢?

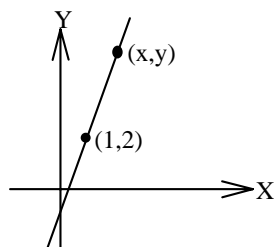
練習: 求過點(2,1), (4,3)的直線方程式

練習: 求過點(2,7), (4,3)的直線方程式

二、知道斜率及通過點(點斜式)

線上的點與已知點所算出來的斜率須是所要求的斜率

討論: 過點(1,2)且斜率為 3 的直線



$$\begin{aligned} \frac{y-2}{x-1} &= 3 \Rightarrow 3(x-1) = y-2 \\ \Rightarrow 3x-3 &= y-2 \Rightarrow 3x-y-1=0 \end{aligned}$$

練習: 過點(2,1)且斜率是 3 的直線

練習: 過點(5,2)且斜率是 1 的直線

三、知道直線與x,y軸的交點(截距式)

x截距即是直線跟x軸的交點，y截距即是直線跟y軸的交點，所以截距式是兩點式的特例，在直線跟x，y軸都有交會的狀況下，可用截距式

討論:

x截距 1，表示直線通過點 (,)

x截距 3，表示直線通過點 (,)

x截距 -2，表示直線通過點 (,)

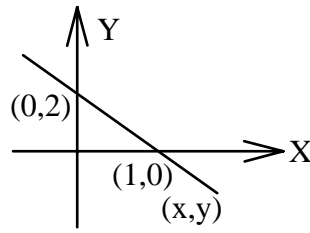
y截距 2，表示直線通過點 (,)

y截距 3，表示直線通過點 (,)

y截距 -5，表示直線通過點 (,)

y截距 1，表示直線通過點 (,)

討論：求 x截距1，y截距2的直線方程式，即通過（ ， ）和（ ， ）兩點



$$\frac{y-2}{x-0} = \frac{0-2}{1-0} \Rightarrow \frac{y-2}{x} = -2 \Rightarrow 2x + y - 2 = 0$$

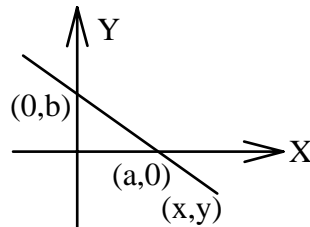
練習：x截距 2，y截距 1 的直線，即通過（ ， ）和（ ， ）

練習：x截距 3，y截距 4 的直線，即通過（ ， ）和（ ， ）兩點

練習：x截距 -2，y截距 1 的直線，即通過（ ， ）和（ ， ）兩點

練習：直線一定會有x截距與y截距嗎？

討論：x 截距 a，y 截距 b的直線



$$\begin{aligned} \frac{y-b}{x-0} &= \frac{0-b}{a-0} \Rightarrow \frac{y-b}{x} = \frac{-b}{a} \Rightarrow ay - ab = -bx \\ \Rightarrow bx + ay &= ab \quad \text{同除以} ab \Rightarrow \frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \end{aligned}$$

四、知斜率及一截距(斜截式)

討論： y 截距 3 且斜率是 2 的直線，即通過 (0,3)，直線上任一點 (x,y) 兩點的斜

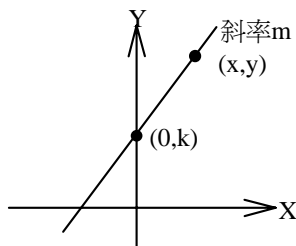
$$\text{率} = \frac{y-3}{x-0} = 2 \Rightarrow \frac{y-3}{x} = 2 \Rightarrow y-3 = 2x \Rightarrow y = 2x+3$$

練習： y 截距 1 且斜率是 2 的直線

練習： y 截距 5 且斜率是 3 的直線

練習： y 截距 -2 且斜率是 1 的直線

討論： y 截距 k 且斜率是 m 的直線



$$\frac{y-k}{x-0} = m \Rightarrow y-k = mx \Rightarrow y = mx + k$$

觀察直線 $y = mx + k$ ，例如當 x 變到其他數值時， y 也跟著變到其他數去了， y 受到 x 的影響， y 是 x 的函數。而且果 y 的值隨著因 x 的值成「固定比率」在上升下降 (y 的增減量是 x 增減量的斜率倍)

一般稱直線型的函數為「線性函數」，線性函數的果是隨著因成固定比率增加減少的。而不管因 x 是從那裡變到那裡，只要是變動量一樣則果的變動量剛好是因變動量的斜率倍

$$f(x) = 3x + 1$$

$$f(2) = 7, f(5) = 16$$

$$f(5) - f(2) = 9$$

$$\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$f(3) = 10, f(6) = 19$$

$$f(6) - f(3) = 9$$

$$\frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{\text{果的變動量}}{\text{因的變動量}} = \text{斜率}$$

練習: $y = f(x) = x^2$ 是線性函數嗎?

五、直線一般式 $ax + by + c = 0$

任何表示法都能寫成一般式 $ax + by + c = 0$ 的形態，而觀察一般式可知：

$$\text{斜率} = -\frac{x\text{項的係數}}{y\text{項的係數}} = -\frac{a}{b}$$

直線	斜率
$3x - y - 1 = 0$	$-\frac{3}{-1} = 3$
$x - 2y + 3 = 0$	$-\frac{1}{-2} = 1/2$
$2x + y - 2 = 0$	$-\frac{2}{1} = -2$
$y = x$	
$2y = 3$	

原理說明：

(x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 是直線上的二點，則

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \quad , \quad ax_2 + by_2 + c = 0$$

$$\Rightarrow a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

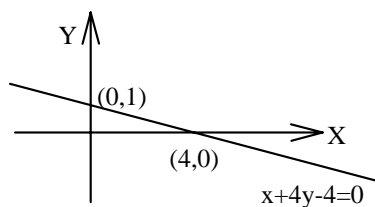
$$\Rightarrow b(y_2 - y_1) = -a(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \text{斜率} = \frac{\text{第2坐標差}}{\text{第1坐標差}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-a}{b}$$

📖 1.3 直線的圖形

一、畫直線圖形 ~ 找二個通過點

討論: $x+4y=4$ 的圖形通過 $(0,1)$ 及 $(4,0)$

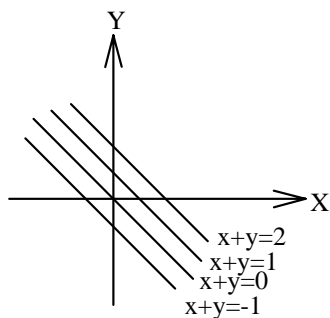


練習: $x+2y=3$ 圖形

練習: $3x+2y=6$ 圖形

練習: 畫下列四條直線的圖形 :

$$x+y = -1 \quad \text{、} \quad x+y = 0 \quad \text{、} \quad x+y = 1 \quad \text{、} \quad x+y = 2$$



練習: 畫下列四條直線的圖形 :

$$x-y = -1 \quad \text{、} \quad x-y = 0 \quad \text{、} \quad x-y = 1 \quad \text{、} \quad x-y = 2$$

二、直線性質：

1.斜率可以表示「平均變動率」

討論：自己2歲時身高有65公分，5歲時身高有110公分，平均一年長高幾公分呢？

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{110 - 65}{5 - 2} = 15$$

練習：函數 $f(x)=x^2$ 在 $x=2$ 時到 $x=5$ 時的平均變動率 $\Rightarrow 7$

練習：高鐵啓動一分鐘時時速60km，五分鐘時時速220km，請問一到五分鐘的平均變動率 = ?

2.斜率相同則是平行或同一直線

$$x-y=1 \quad ; \quad 2x-2y=2 \quad \text{同一直線}$$

$$x-y=1 \quad ; \quad 2x-2y=3 \quad \text{是二平行直線}$$

討論：過點(2,1)且平行於 $x+2y+1=0$ 的直線

$$x+2y+1=0 \Rightarrow 2y=-x-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \quad \text{所以斜率}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{y-1}{x-2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow 2y-2=-x+2 \Rightarrow x+2y-4=0$$

練習：過點(2,1)且平行於 $x+3y+1=0$ 的直線

練習：過點(2,1)且平行於 $x+3y+1=0$ 的直線

3.斜率相乘是 -1 則 兩線相互垂直

$$m_1 \times m_2 = -1 \Leftrightarrow \text{二線互相垂直}$$

討論： $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$, $5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -1$, $-7 \cdot \left(\frac{1}{7}\right) = -1$, $\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$

討論：與斜率3直線垂直的直線斜率是 $\left(-\frac{1}{3}\right)$

練習：與斜率 $\left(\frac{1}{2}\right)$ 直線垂直的直線斜率是？

討論：過點(2,1)且垂直於 $x+2y+1=0$ 的直線

$$x+2y+1=0 \Rightarrow 2y=-x-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \text{ 所以斜率} = -\frac{1}{2}$$

與它垂直的直線，斜率=2

$$\frac{y-1}{x-2} = 2 \Rightarrow y-1=2x-4 \Rightarrow 2x-y-3=0$$

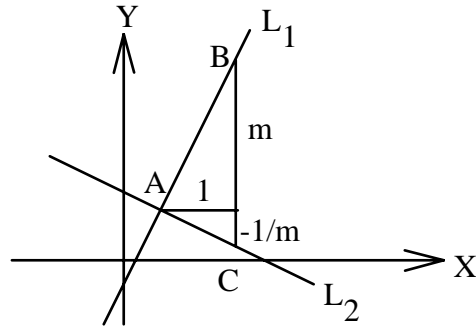
練習：過點(2,1)且垂直於 $x+3y+1=0$ 的直線

練習：過點(2,3)且垂直於 $-4x+y+1=0$ 的直線

練習：過點(1,5)且垂直於 $x+2y-5=0$ 的直線

原理說明：

考慮斜率含意：斜率是 m 表示當 x 變動量是1時則 y 變動量是 m ，斜率是 $-1/m$ 表示當 x 變動量是1時則 y 變動量是 $-1/m$



$$\begin{aligned} (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 &= (\sqrt{1+m^2})^2 + (\sqrt{1+(1/m)^2})^2 \\ &= 1+m^2 + 1 + \frac{1}{m^2} = \left(m + \frac{1}{m}\right)^2 = (\overline{BC})^2 \end{aligned}$$

符合畢氏定理所以是直角三角形

📖 1.4 兩直線的交點

兩直線的交點 ~ 斜率不同時會有一個交點

討論: 直線: $L_1 : x+y = 1$ 與 $L_2 : x-y = 3$ 的交點

交點在直線 L_1 上 \Rightarrow 符合方程式 $x+y = 1$ 且

交點在直線 L_2 上 \Rightarrow 符合方程式 $x-y = 3$

$\Rightarrow x=2, y=-1 \Rightarrow$ 交點是 $(2, -1)$

$$\begin{cases} x+y=1 \cdots (1) \\ x-y=3 \cdots (2) \end{cases} \quad \text{兩式相加 } 2x=4 \Rightarrow x=2 \quad \text{代入(1)} \Rightarrow 2+y=1 \Rightarrow y=-1$$

練習: 直線: $L_1 : x+y = 2$ 與 $L_2 : x-y = 1$ 的交點

練習: 直線: $L_1 : x+y = 3$ 與 $L_2 : 2x-3y = 1$ 的交點

練習: 直線: $L_1 : 3x-2y = 9$ 與 $L_2 : 2x-3y = 1$ 的交點

練習: 求右列兩直線的交點 $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+4y=0 \end{cases} \Rightarrow (-2, 1)$

練習: 求右列兩直線的交點 $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=5 \end{cases} \Rightarrow x=2, y=1$

練習：求右列兩直線的交點 $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ x+3y=7 \end{cases} \Rightarrow (1, 2)$

練習：求右列兩直線的交點 $\begin{cases} 2x-y=7 \\ x+5y=20 \end{cases} \Rightarrow (5, 3)$

討論：求右列兩直線的交點 $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R}, y=3-x \quad \text{or} \quad y \in \mathbb{R}, x=3-y$$

練習：求右列兩直線的交點 $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+6y=2 \end{cases}$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R}, y = \frac{1-x}{3} \quad \text{or} \quad y \in \mathbb{R}, x=1-3y$$

練習：求右列兩直線的交點 $\begin{cases} x+5y=2 \\ 2x+10y=4 \end{cases}$

討論：直線: $L_1: x+y=1$ 與 $L_2: x+y=3$ 的交點

練習：求右列兩直線的交點 $\begin{cases} x+5y=2 \\ 2x+10y=6 \end{cases}$

練習：求右列兩直線的交點 $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+6y=3 \end{cases}$

📖 1.5 點到直線的距離

平面上點到直線的距離 ~ 標準化的代入值

點 (x_0, y_0) 到直線 $ax+by+c=0$ 的距離是 :

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

討論： 點 $(3,4)$ 到直線 $x+2y-6=0$ 的距離

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3+8-6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

練習： 點 $(3,2)$ 到直線 $3x+4y-10=0$ 的距離

練習： 點 $(1,2)$ 到直線 $3x+4y-1=0$ 的距離

練習： 點 $(5,-3)$ 到直線 $3x+4y-3=0$ 的距離

練習： 點 $(1,2)$ 到直線 $3x+ y-1=0$ 的距離

練習： 點 $(1,2)$ 到直線 $2x+y-7=0$ 的距離