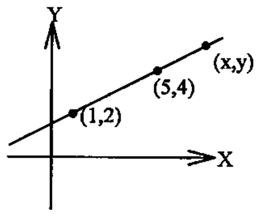
🕮 1.2 直線的方程式

直線的方程式(特徵式) ~ 考慮斜率與通過點

一、已知線上兩點的直線(兩點式) ~

線上任意二點算出來的斜率與已知二點所算出來的斜率會一樣(不在直線上的點所算出來的斜率不會一樣)

討論: 過點(1,2),(5,4)的直線



(1,2) 與 (x,y) 的斜率=$\dfrac{y-2}{x-1}$ ，(1,2) 與 (5,4) 的斜率=$\dfrac{4-2}{5-1}$

兩斜率應相同　所以　$\dfrac{y-2}{x-1}=\dfrac{4-2}{5-1} \Rightarrow \dfrac{y-2}{x-1}=\dfrac{2}{4} \Rightarrow \dfrac{y-2}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\ x-1=2y-4 \quad\Rightarrow\quad x-2y+3=0$

在線上任何一點的 x 坐標與 y 坐標代入方程式都可使等號成立；而不在線上的點代入則等號不會成立。所以方程式可以判定那些點在線上，那些不在線上

$x=13$, $y=8$ 代入$x-2y+3=13-2\cdot 8+3=13-16+3=0$　符合方程式的要求，所以

(13,8) 這個點在$x-2y+3=0$這條線上

練習: 點(11,7)會在線上嗎? (11,8)、(11,5)呢?

$x=11,\ y=7.\quad x-2y+3=11-2\cdot7+3=11-14+3=0$

$x=11,\ y=5.\quad x-2y+3=11-2\cdot5+3=11-10+3\neq0$ ∴(11,5)不在線上.

$x=11,\ y=8\quad x-2y+3=11-2\cdot8+3=11-16+3\neq0$ ∴(11,8)不在線上

練習: 求過點(2,1), (4,3)的直線方程式　$x-y-1=0$

$\dfrac{y-1}{x-2}=\dfrac{3-1}{4-2} \Rightarrow \dfrac{y-1}{x-2}=\dfrac{2}{2} \Rightarrow y-1=x-2$

$\Rightarrow x-y-1=0$

練習: 求過點(2,7), (4,3)的直線方程式　$2x+y-11=0$

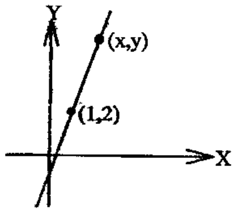
$\dfrac{y-3}{x-4}=\dfrac{7-3}{2-4} \Rightarrow \dfrac{y-3}{x-4}=\dfrac{4}{-2} \Rightarrow -y+3=2x-8$

$\Rightarrow 2x+y=11$

二、知道斜率及通過點(點斜式)

線上的點與已知點所算出來的斜率須是所要求的斜率

討論: 過點(1,2)且斜率爲 3 的直線



$$\frac{y-2}{x-1}=3 \Rightarrow 3(x-1)=y-2$$
$$\Rightarrow 3x-3=y-2 \Rightarrow 3x-y-1=0$$

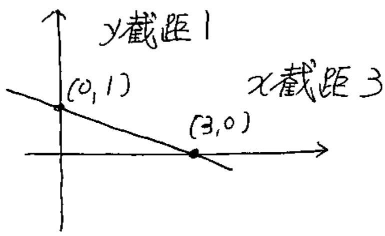
練習: 過點(2,1)且斜率是 3 的直線 $\frac{y-1}{x-2}=3 \Rightarrow y-1=3x-6 \Rightarrow 3x-y-5=0$

練習: 過點(5,2)且斜率是 1 的直線 $\frac{y-2}{x-5}=1 \Rightarrow y-2=x-5 \Rightarrow x-y-3=0$

三、知道直線與x,y軸的交點(截距式)

x截距即是直線跟x軸的交點，y截距即是直線跟y軸的交點，所以截距式是兩點式的特例，在直線跟x，y軸都有交會的狀況下，可用截距式

討論:



x截距 1，表示直線通過點 (1 , 0)

x截距 3，表示直線通過點 (3 , 0)

x截距 -2，表示直線通過點 (-2 , 0)

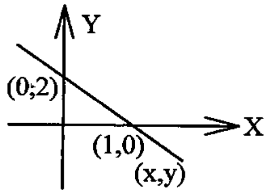
y截距 2，表示直線通過點 (0 , 2)

y截距 3，表示直線通過點 (0 , 3)

y截距 -5，表示直線通過點 (0 , -5)

y截距 1，表示直線通過點 (0 , 1)

討論：求 x截距1，y截距2的直線方程式，即通過（1,0）和（0,2）兩點



$$\frac{y-2}{x-0}=\frac{0-2}{1-0} \Rightarrow \frac{y-2}{x}=-2 \Rightarrow 2x+y-2=0$$

練習: x截距 2，y截距 1 的直線，即通過（2,0）和（0,1）

$$\frac{0-1}{2-0}=\frac{y-1}{x-0} \Rightarrow \frac{-1}{2}=\frac{y-1}{x} \Rightarrow -x=2y-2 \Rightarrow x+2y-2=0$$

練習: x截距 3，y截距 4 的直線，即通過（3,0）和（0,4）兩點

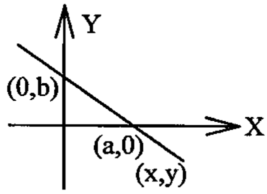
$$\frac{y-4}{x-0}=\frac{0-4}{3-0} \Rightarrow \frac{y-4}{x-0}=\frac{-4}{3} \Rightarrow 3y-12=-4x \Rightarrow 4x+3y-12=0$$

練習: x截距 -2，y截距 1 的直線，即通過（-2,0）和（0,1）兩點

$$\frac{y-1}{x-0}=\frac{0-1}{-2-0} \Rightarrow \frac{y-1}{x}=\frac{-1}{-2} \Rightarrow -2y+2=-x \Rightarrow x-2y+2=0$$

練習: 直線一定會有x截距與y截距嗎? 不一定，∵平行線只有y截距.
垂直線只有x截距.

討論： x 截距 a，y 截距 b的直線



$$\frac{y-b}{x-0}=\frac{0-b}{a-0} \Rightarrow \frac{y-b}{x}=\frac{-b}{a} \Rightarrow ay-ab=-bx$$

$$\Rightarrow bx+ay=ab \quad \text{同除以}ab \Rightarrow \frac{bx}{ab}+\frac{ay}{ab}=\frac{ab}{ab} \Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

四、知斜率及一截距(斜截式)

討論: y 截距 3 且斜率是 2 的直線，即通過（0,3），直線上任一點（x,y）兩點的斜率$=\dfrac{y-3}{x-0}=2 \Rightarrow \dfrac{y-3}{x}=2 \Rightarrow \quad y-3=2x \Rightarrow \quad y=2x+3$

練習: y 截距 1 且斜率是 2 的直線

$y=2x+1$

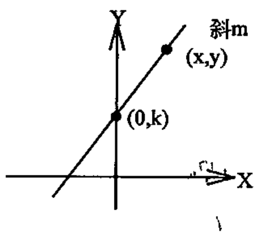
練習: y 截距 5 且斜率是 3 的直線

$y=3x+5$

練習: y 截距 -2 且斜率是 1 的直線

$y=x-2$

討論: y 截距 k 且斜率是 m 的直線



$$\frac{y-k}{x-0}=m \quad \Rightarrow \quad y-k=mx \quad \Rightarrow \quad y=mx+k$$

觀察直線 $y=mx+k$，例如當x變到其他數值時，y也跟著變到其他數去了，y受到x的影響，y是x的函數。而且果y的值隨著因x的值成「固定比率」在上升下降(y的增減量是x增減量的斜率倍)

一般稱直線型的函數爲「線性函數」，線性函數的果是隨著因成固定比率增加減少的。而不管因x是從那裡變到那裡，只要是變動量一樣則果的變動量剛好是因變動量的斜率倍

$$f(x)=3x+1$$

$$f(2)=7 \quad , f(5)=16$$

$$f(5)-f(2)=9$$

$$\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{9}{3}=3$$

$$f(3)=10 \quad , f(6)=19$$

$$f(6)-f(3)=9$$

$$\frac{f(6)-f(3)}{6-3}=\frac{9}{3}=3$$

$$\frac{\text{果的變動量}}{\text{因的變動量}} = \text{斜率}$$

練習: $y=f(x)=x^2$ 是線性函數嗎?

五、直線一般式 ax+by+c = 0

任何表示法都能寫成一般式 ax+by+c = 0 的形態，而觀察一般式可知：

$$\text{斜率} = -\frac{x\text{項的係數}}{y\text{項的係數}} = -\frac{a}{b}$$

直線	斜率
3x-y-1 = 0	$-\frac{3}{-1}=3$
x-2y+3 = 0	$-\frac{1}{-2}=1/2$
2x+y-2 = 0	$-\frac{2}{1}=-2$
y = x	1
2y = 3	0

原理說明 :

(x_1, y_1)、(x_2, y_2)是直線上的二點，則

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \quad , \quad ax_2 + by_2 + c = 0$$

$$\Rightarrow \quad a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad b(y_2 - y_1) = -a(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \text{斜率} = \frac{\text{第2坐標差}}{\text{第1坐標差}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-a}{b}$$