Chapter 1

三角函數(I)

1-1　有向角及其計算

假設單位圓(圓的半徑)之圓心為O，A為圓上一點，當A點沿圓周隨著射線$\overrightarrow{OA}$旋轉到B點，由$\overrightarrow{OA}$及$\overrightarrow{OB}$二射線所成的角稱為有向角。其中O稱為頂角，$\overrightarrow{OA}$射線稱為始邊，$\overrightarrow{OB}$射線稱為終邊。從始邊轉到終邊就是旋轉方向，一般來說，逆時鐘的旋轉方向是正的，順時鐘的旋轉方向是負的。旋轉方向是正的角稱為正向角，

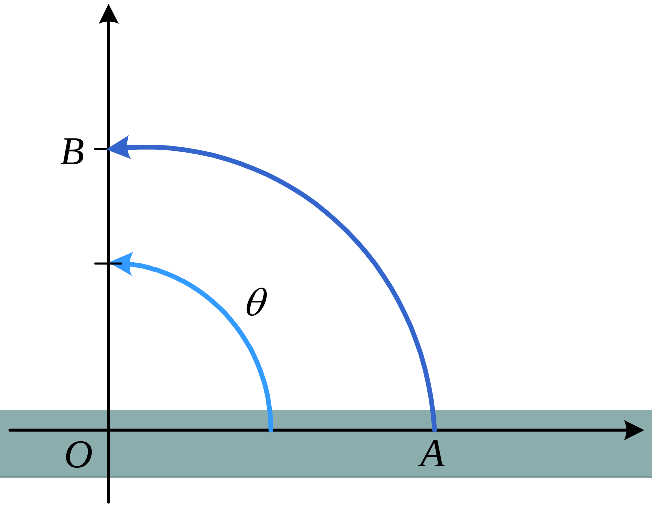


圖1-1

1-1　有向角及其計算

簡稱為正角；旋轉方向是負的角稱為負向角，簡稱為負角。正向角與負向角均稱為有向角。

有向角的度量單位有兩種：

1. 弳度量：一個單位圓的周長為2π，所以一個圓周為2π弳。
2. 度度量：一個圓周為360°，將一個圓分成360等分，每一個等分所對的圓心角稱為1°，念成一度；1°的六十分之一稱為$1'$，念成一分；$1'$的六十分之一稱為$1''$，$1''$念成一秒。

$$1\pi\,(\text{弳}) = 180^\circ$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,(\text{弳})$$

1-1　有向角及其計算

第一象限：$2n\pi < \theta < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$，其中 $n \in Z$　（整數）

第二象限：$2n\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 2n\pi + \pi$，其中 $n \in Z$　（整數）

第三象限：$2n\pi < \theta < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$，其中 $n \in Z$　（整數）

第四象限：$2n\pi + \frac{3\pi}{2} < \theta < 2n\pi + 2\pi$，其中 $n \in Z$　（整數）

1-1　有向角及其計算

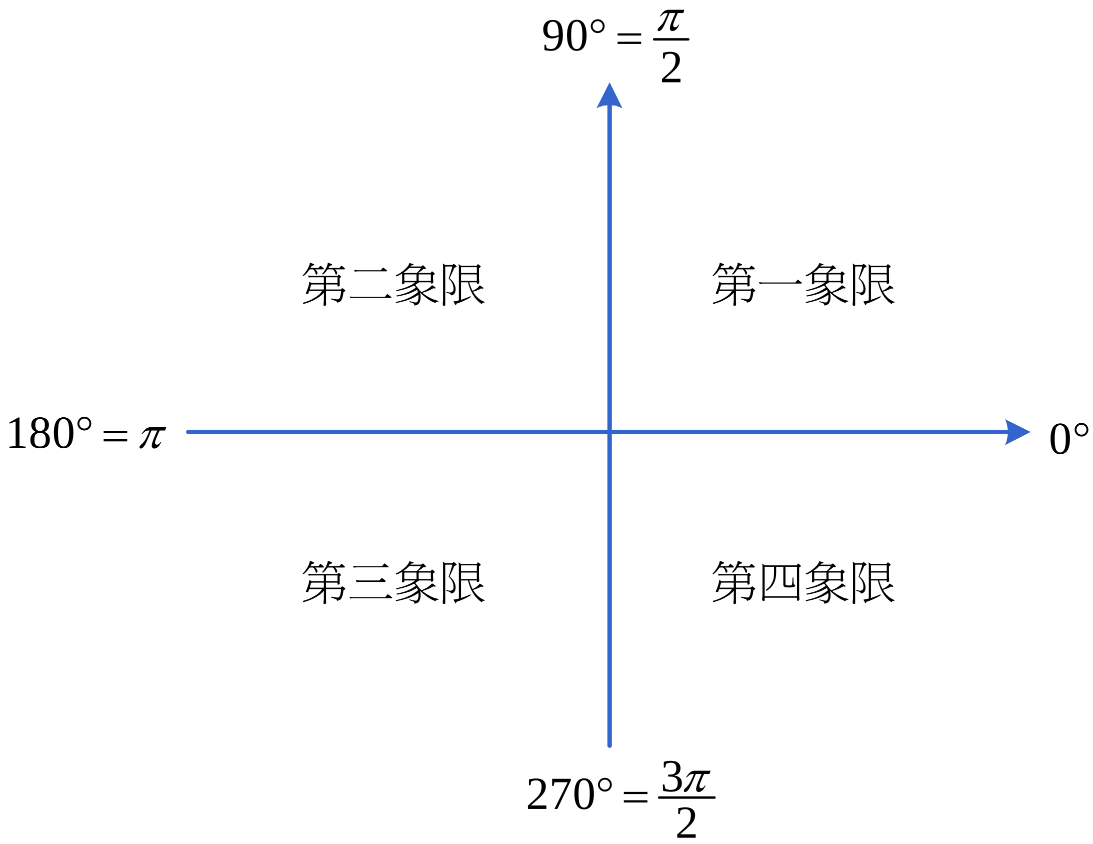


圖1−2

1-1　有向角及其計算

- (一)弧長定理

設一半徑為r，則度量為θ的圓心角所對的弧長$S=r\theta$。(看圖1-3)

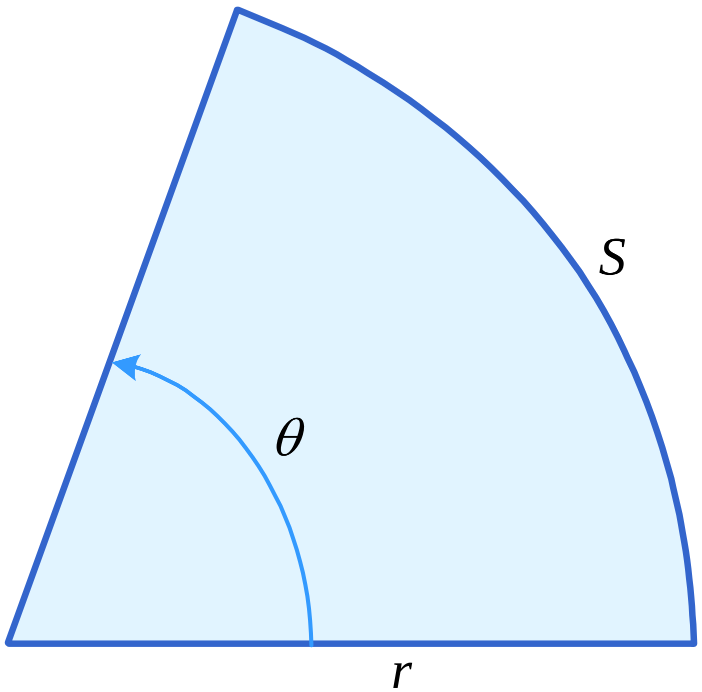


圖1-3

- (二)扇形面積定理

設一半徑為r，則度量為θ的圓心角所對的扇形面積

$A=\frac{1}{2}r^2\theta$（看圖1-4）

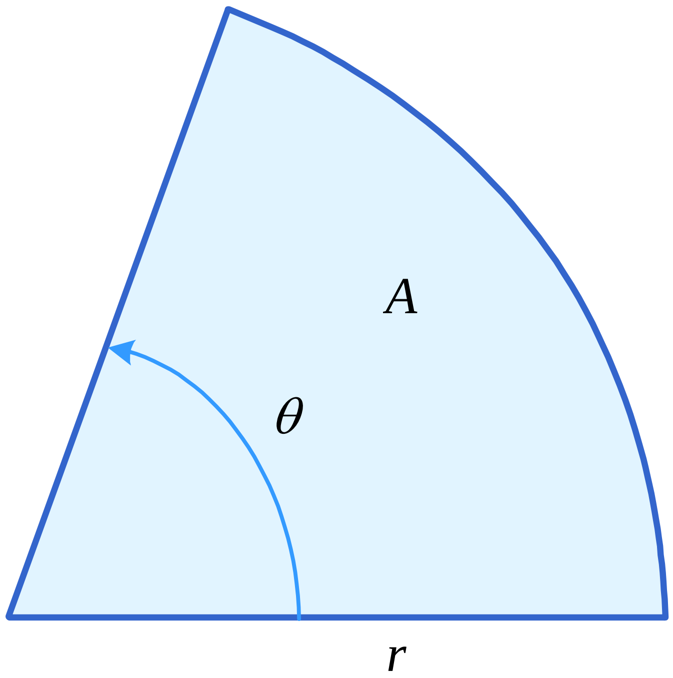


圖1-4

1-2　三角函數

- (一)銳角三角函數

　　下列圖形為一直角三角形，以 θ 角為標準，θ 所對的邊稱為對邊，以符號a表示；與 θ 角相鄰的邊，稱為鄰邊，以符號b表示；而三角形斜的邊，稱為斜邊，以符號c表示。(看圖1-5)

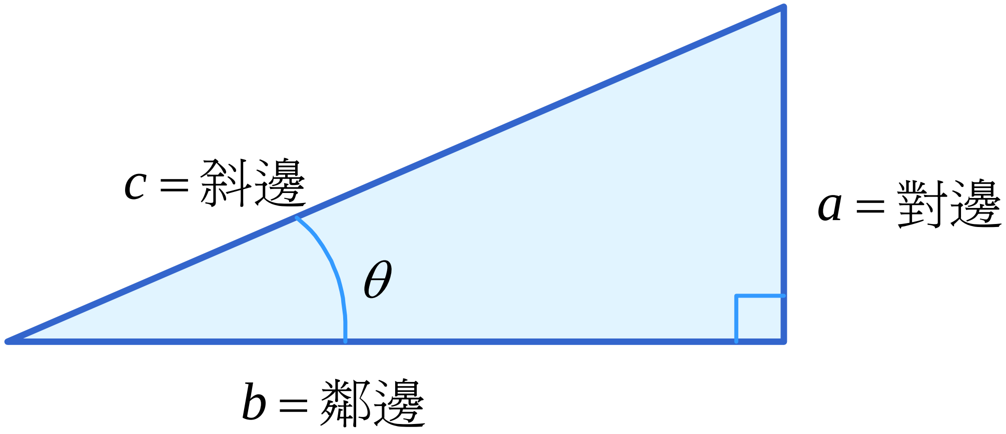


圖1-5

1-2　三角函數

六個三角函數定義為：

$$\sin\theta = \frac{對邊}{斜邊} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{鄰邊}{斜邊} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{對邊}{鄰邊} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\theta = \frac{鄰邊}{對邊} = \frac{b}{a}$$

$$\sec\theta = \frac{斜邊}{鄰邊} = \frac{c}{b}$$

$$\csc\theta = \frac{斜邊}{對邊} = \frac{c}{a}$$

1-2　三角函數

- (二)任意角三角函數

　　由下圖(圖1-6）可以得知6個三角函數在任意象限上的正負性。在每一個象限上，都有6個三角函數，在象限上的三角函數為正，其餘為負。

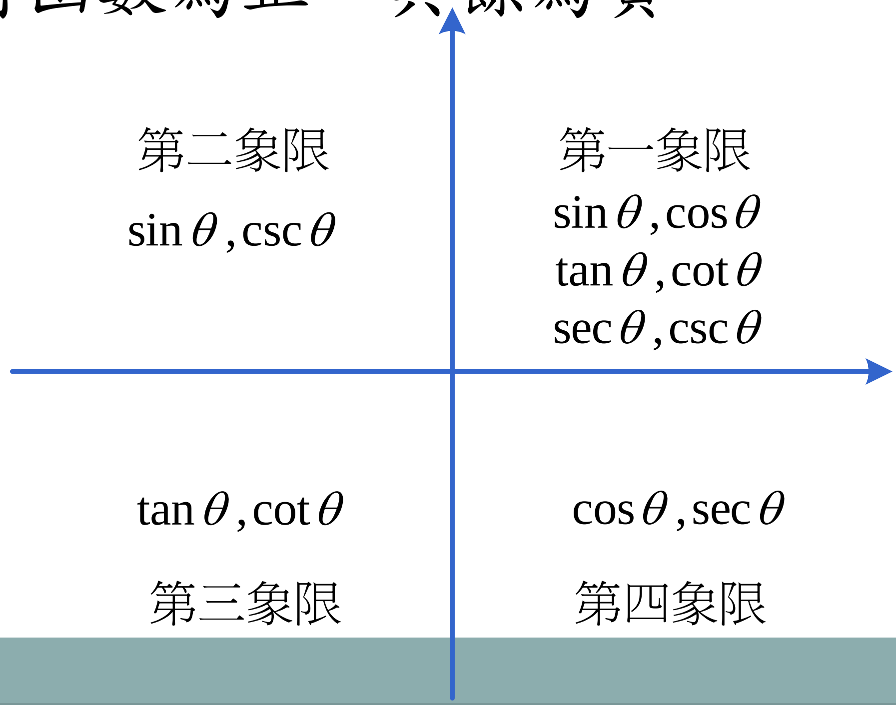


圖1-6

1-2　三角函數

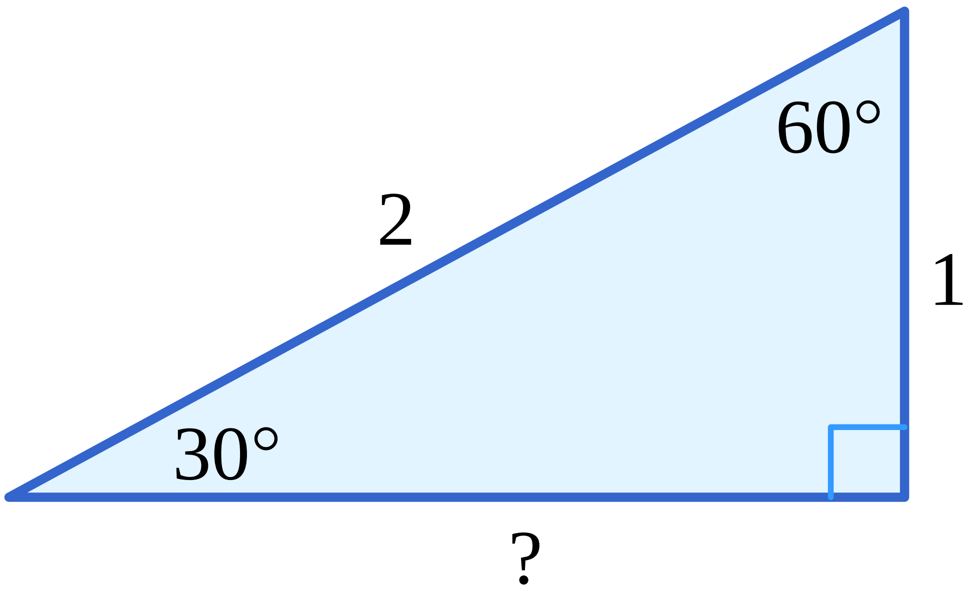
1. 當 θ 角落在第一象限內，6個三角函數皆為正。
2. 當 θ 角落在第二象限內，除 $\sin\theta, \csc\theta$ 為正，其餘4個函數皆為負。
3. 當 θ 角落在第三象限內，除 $\tan\theta, \cot\theta$ 為正，其餘4個函數皆為負。
4. 當 θ 角落在第四象限內，除 $\cos\theta, \sec\theta$ 為正，其餘4個函數皆為負。

$\sin\theta$	0	1	0	-1
$\cos\theta$	1	0	-1	0
$\tan\theta$	0	無	0	無
$\cot\theta$	無	0	無	0
$\sec\theta$	1	無	-1	無
$\csc\theta$	無	1	無	-1

其中 $n \in Z$(整數)。

1-2　三角函數

假設一直角三角形，三個內角分別為30°, 60°, 90°, ，30°內角所對的邊長為1，90°內角所對邊長為2，如下圖所示：



1-2　三角函數

- 1. $\boldsymbol{\theta = 30°}$

令 $c = 2, a = 1, b = ?$

使用畢氏定理

$$
\begin{aligned}
& c^2 = a^2 + b^2 \\
\Rightarrow\ & 2^2 = 1^2 + b^2 \\
\Rightarrow\ & 4 = 1 + b^2 \\
\Rightarrow\ & 4 - 1 = b^2 \\
\Rightarrow\ & 3 = b^2 \\
\Rightarrow\ & b = \pm\sqrt{3}\ (\text{負的不合}) \\
\Rightarrow\ & b = \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

1-2　三角函數

六個三角函數分別為：

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{2};\qquad \cos 30^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};\qquad \cot 30^\circ = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{c}{b} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};\qquad \csc 30^\circ = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$$

- 2. $\theta = 60°$

令 $c = 2, b = 1, a = ?$

使用畢氏定理　$c^2 = a^2 + b^2$

$$\Rightarrow 2^2 = a^2 + 1^2$$

$$\Rightarrow 4 = a^2 + 1$$

$$\Rightarrow 4 - 1 = a^2$$

$$\Rightarrow 3 = a^2$$

$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{3}\ (\text{負的不合})$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{3}$$

1-2　三角函數

六個三角函數分別為：

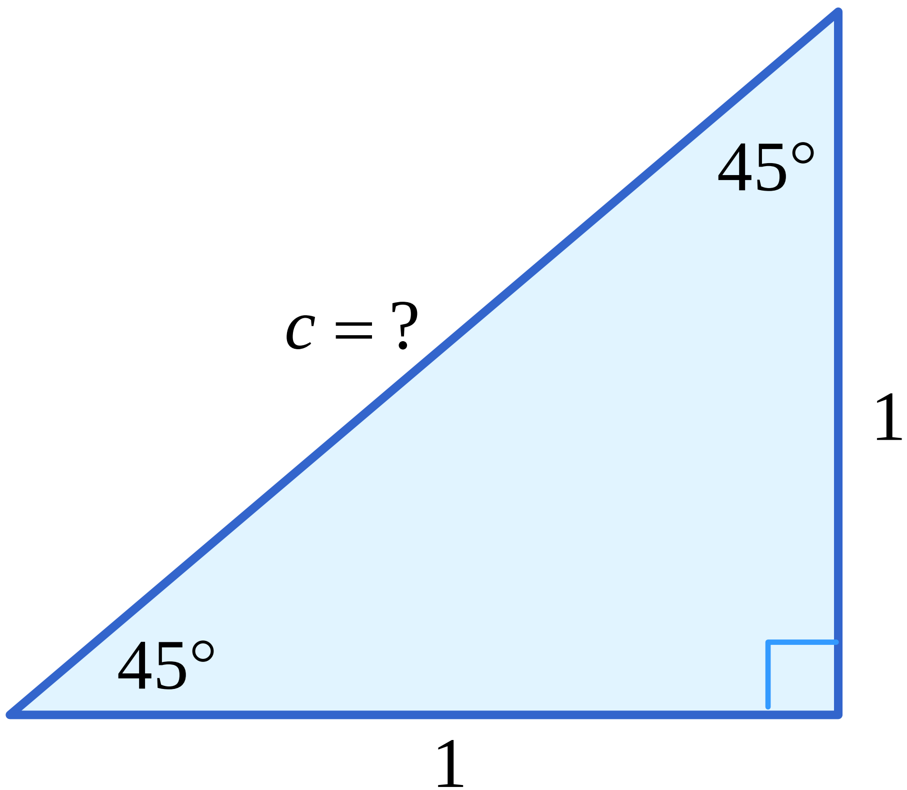
$$\sin 60^\circ = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \cos 60^\circ = \frac{b}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3};\qquad \cot 60^\circ = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{c}{b} = \frac{2}{1} = 2;\qquad \csc 60^\circ = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

1-2　三角函數

　　假設一等角腰三角形，三個內角分別為 $45^\circ, 90^\circ, 45^\circ$，$45^\circ$ 內角所對的邊長為1，如下圖所示



- 1. $\theta = 45°$

令 $c = ?, a = 1, b = 1$

使用畢氏定理

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$\Rightarrow c^2 = 1^2 + 1^2$$
$$\Rightarrow c^2 = 1 + 1$$
$$\Rightarrow c^2 = 2$$
$$\Rightarrow c = \pm\sqrt{2}\ (\text{負的不合})$$
$$\Rightarrow c = \sqrt{2}$$

1-2　三角函數

六個三角函數分別為：

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \cos 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1;\qquad \cot 45^\circ = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2};\qquad \csc 45^\circ = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

將上述結果整理成表格，列表如下：

1-2 三角函數

$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sec\theta$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
$\csc\theta$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

1-2　三角函數

1. 倒數關係

$$\sin\theta \cdot \csc\theta = 1; \quad \tan\theta \cdot \cot\theta = 1; \quad \cos\theta \cdot \sec\theta = 1$$

2. 平方關係

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1; \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta; \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$