Chapter 2

三角函數(II)

2-1　廣義角的三角函數

在角度上，θ 與 $2k\pi+\theta[k\in Z($整數$)]$ 有相同的始邊及終邊，所以計算出的三角函數值皆一樣，以下我們列出8個定理：

定理1　設 θ 為任意角，$k\in Z($整數$)$，則

$$\sin(2k\pi+\theta)=\sin\theta$$

$$\cos(2k\pi+\theta)=\cos\theta$$

$$\tan(2k\pi+\theta)=\tan\theta$$

$$\cot(2k\pi+\theta)=\cot\theta$$

$$\sec(2k\pi+\theta)=\sec\theta$$

$$\csc(2k\pi+\theta)=\csc\theta$$

2-1　廣義角的三角函數

定理2　負角公式

設θ為任意角，則

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta$$

$$\csc(-\theta) = -\csc\theta$$

2-1　廣義角的三角函數

定理3　設θ為任意角，則

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$

$$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$$

$$\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$$

$$\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$$

$$\csc(\pi+\theta)=-\csc\theta$$

定理4　補角公式

設θ為任意角，則

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

$$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$$

$$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$$

$$\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$$

$$\csc(\pi-\theta)=\csc\theta$$

2-1　廣義角的三角函數

定理5　餘角公式

設 θ 為任意角，則

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

2-1　廣義角的三角函數

定理6　設 θ 為任意角，則

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\csc\theta$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sec\theta$$

2-1 廣義角的三角函數

定理7　設 θ 為任意角，則

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\csc\theta$$

$$\csc\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\sec\theta$$

2-1　廣義角的三角函數

定理8　設θ為任意角，則

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\csc\theta$$

$$\csc\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

2-2　複角公式

定理9　設x, y為任意角，則

(a) $\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$

(b) $\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$

定理10　設x, y為任意角，則

(a) $\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x$

(b) $\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\sin y\cdot\cos x$

定理11　設x, y為任意角，則

（a）$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\cdot\tan y}$$

（b）$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}$$

2-3 倍角與半角公式

定理12　二倍角公式

設 θ 為任意角，則

(a) $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$

(b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

定理13　半角公式

設 θ 為任意角，則

(a) $\sin\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$

(b) $\cos\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$

其正負號由 $\dfrac{\theta}{2}$ 所在的象限決定。

2-4　三角函數值的查表

從三角函數值表的最左邊可以查到0°~45°的函數值，而從表的最後面的最右邊可以查到45°~90°的函數值