Chapter 3

多項式

3-1　多項式的定義

我們學過數字的四則運算：加、減、乘、除，也學過指數的表示法。現在我們試著把x當作一個數字，將他跟其他的數字作任意的加法、減法與乘法。這樣會作出一堆我們無法決定的計算結果，比如說下面的例子：

$$x+2-3\times x$$

$$x\times x\times x\times 2-x+34$$

我們先定義下面的符號：

$$x+x=2x$$

$$x+x+x=3x$$

$$5\times x=5x$$

$$x\times x=x^2$$

$$x\times x\times x=x^3$$

3-1　多項式的定義

這樣一來，上面的兩個例子就有一個表示的方法：

$$x+2-3\times x=x+2-3x=-2x+2$$

$$x\times x\times x\times 2-x+34=2x^3-x+34$$

這樣的表示方法，我們稱為多項式。讀者可以這樣解釋：有很多不同樣子的「項」相加（減）在一起。

我們也會發現，某些多項式其實只有一項，例如：

$$x\times x\times x\times 2\times x\times 34=68x^4$$

3-1　多項式的定義

我們也會稱他為單項式。

　　一個多項式裡面，每個單項式我們稱呼為項，單項式裡面 的指數常會用來稱呼這一個項，比如說*X*的三次項，*X*的五次項等等。如果這個單項式純粹只是一個數字，我們稱呼為常數項。

3-1　多項式的定義

- 多項式的次數

　　我們將多項式裡面所有單項式的 的指數作一個比較，最大的次數，我們稱為這個多項式的次數。

- 係　數

　　對於1次以上的單項式，前面的數字，包含正負號，我們稱為這個單項式的係數。

3-1　多項式的定義

- 降冪表示法與升冪表示法

　　我們常常把多項式裡各項的順序，依照次數高低來排列，由高而低的排法稱為降冪表示法，由低而高的排法稱為升冪表示法。

3-2　多項式的四則運算

在這一節裡面，我們討論的是多項式的四則運算：加、減、乘與除。

(一)多項式的加法

對各多項式裡冪數一樣的項，係數相加在一起，就是加法了。

(二)多項式的減法

對各多項式裡冪數一樣的項，係數相減在一起，就是減法了。

3-2 多項式的四則運算

(三)多項式的乘法

將各多項式裡每一項都相互相乘，最後再將相同冪次的項係數相加在一起。

(四)多項式的除法

我們在這裡介紹長除法的計算方式。

- 餘式定理

　　任何一個多項式$p(x)$除以一次多項式$q(x)=x-a$的餘式等於$p(a)$。

3-3　多項式的因式分解

在這一節與下一節裡面，我們所討論的多項式，係數都是整數。當然，這些內容也可以針對其他係數的多項式來討論，不過有些結果會有變化，為了不讓讀者混淆，我們只討論整數係數的多項式。

在前一節我們知道多項式的除法如何計算，就好像整數的除法，如果餘式等於0的話，我們說$p(x)$被$q(x)$整除，有時候我們也會說$q(x)$是$p(x)$的因式，$p(x)$是$q(x)$的倍式。

3-3　多項式的因式分解

在例42及例43中，我們知道：當$p(x)$被$q(x)$整除時，$p(x)$也會被商式整除，所以商式也是$p(x)$的因式，$p(x)$是商式的倍式。

由例41我們發現：任何多項式都被他本身整除，所以多項式本身就是它的因式，當然，商式1也是它的因式。因此我們說：1是任意一個多項式的因式。

接下來幾個例子，讓我們知道，當係數限制在整數的時候，因式的決定與整除與否是有點差異的。

3-3　多項式的因式分解

(一)二次多項式的因式分解：十字交乘法

(二)利用餘式定理來求多項式的一次因式

在上一節中，我們介紹餘式定理來幫我們求出兩多項式相除後所得到的餘式。當餘式為0的時候，除式就是被除式的因式，商式也是被除式的因式，而且商式的因式也會是被除式的因式，更好的是，商式的次數比被除式的次數低。所以，我們可以利用這樣的方式來求出多項式的一次因式。

3-4　最高公因式與最低公倍式

從上一節，我們知道如何決定一個多項式的因式，並且找到所有的因式。當兩個多項式有共同的因式時，我們說這個因式是這兩個多項式的公因式。

很容易發現的一個事實是，1是所有多項式的公因式。但是，我們也會發現兩個多項式的公因式可能有兩個以上，這時候，我們將這些公因式裡面次數最高的稱為最高公因式。

- 輾轉相除法

3-5　多項式的根

在第一冊中，我們教過一元二次方程式的解，由圖形來理解，它是一個拋物線與x軸的交點。當我們把方程式中的=0去掉後，它就變成一個二次多項式。類似的方法，我們可以推廣到高次多項式。當我們令$x=a$代入多項式$p(x)$中得到一個數字，而這數字為0的時候，我們說$x=a$是這個多項式$p(x)$的根。假如多項式$p(x)$的次數為6，我們也會看到在其他的書上說，$x=a$是一元六次方程式的解，這個方程式，就是在$p(x)$後面加上=0。

3-5　多項式的根

當我們說$x=a$是這個多項式$p(x)$的根時，利用餘式定理，我們也可以說，$x-a$是這個多項式$p(x)$的因式。對於一個3次多項式，如果我們宣稱找到四個不一樣的根時，因為每一個根都可以對應到一個一次多項式，而且這四個一次多項式相乘起來應該會是這3次多項式的因式！次數太多了，不可能！所以，3次多項式最多只有3個根。

3-5　多項式的根

一個多項式的因式也是多項式，因式的根代入原多項式後，也會等於0，也是原多項式的根。所以，當我們找到某多項式因式的根時，也是找到了這多項式的部分根。

多項式的根不一定是整數，在第一冊裡討論一元二次方程式的解時就可以看到例子。當多項式的次數很高的時候，我們就沒有適合的公式來求解，在這一章的最後，我們教讀者一個簡單的方式，來判斷某個多項式的根的大小。

3-5　多項式的根

- 勘根定理

　　當我們把$x=a$及$x=b$分別代入多項式$p(x)$中後，發現兩個數字的正負號相反，我們就說，多項式$p(x)$有一個根，它介在$x=a$及$x=b$之間。

　　假如$a<b$，我們可以說，多項式$p(x)$有一個根比a大而且比b小。一般來說，我們希望a與b是兩個連續的整數，這樣可以估計得準一點。