Chapter 4

矩　陣

4-1　矩陣的定義

矩陣，顧名思義，是個矩形的陣列。矩形應該不會造成讀者誤會，陣列則是由一群數字排列而成，我們通常會用中括號將這些數字包圍住，比如下面的例子：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

4-1　矩陣的定義

上面的例子是一個正方形的陣列，由九個數字排列而成，外面有一個中括號，依照習慣，我們稱呼它為一個3乘3的矩陣，第二個數字3代表有3個直的行，第一個數字3代表每個行有3個數字。下面我們看一個3乘5的矩陣：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$

4-1　矩陣的定義

- (一)方　陣

例1中的矩陣，也是個正方形的陣列，我們又稱爲方陣

- (二)階　數

對於一個*m*乘*n*的矩陣，我們說它的階數是$m \times n$。

當一個矩陣也是方陣的時候，m與n相同，它的階數是$n \times n$，在這裡因爲$m=n$，我們用同一個英文字母表示，同樣的，它也常簡稱爲*n*階方陣。下面是一個4階方陣：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

4-1　矩陣的定義

- 轉秩矩陣

兩個矩陣 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 與 $B=[b_{ij}]_{n\times m}$ 中的數字，如果滿足

$$a_{ij}=b_{ji}$$

那麼這兩個矩陣互為轉秩矩陣。

- 單位矩陣

方陣 $A=[a_{ij}]_{m\times m}$ 中，主對角線上的每一個數字皆為1，其餘的數字皆為0，這樣的矩陣，我們稱呼為單位矩陣。

4-2　矩陣的加法與減法

兩個矩陣如果階數相同，它們是可以作加法與減法的。

其方法爲

- **1.** $C=[C_{ij}]_{m\times n}$ 等於矩陣 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 與 $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ 相加，其中

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

- **2.** $C=[C_{ij}]_{m\times n}$ 等於矩陣 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 與 $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ 相減，其中

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$$

4-3　矩陣的係數積與乘法

- 矩陣的係數積

任一個數字可以跟一個矩陣相乘在一起，結果是得到另一個矩陣。

其方法為 $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ 等於數字b與矩陣 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 相乘，

我們表示為

$$C = bA$$

其中

$$c_{ij} = b \times a_{ij}$$

4-3　矩陣的係數積與乘法

- 矩陣的乘法

一個*m*乘*n*矩陣乘一個*n*乘*l*矩陣，會得到一個*m*乘*l*矩陣

其方法爲 $C=[c_{ik}]_{m\times l}$ 等於矩陣 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 與 $B=[b_{jk}]_{n\times l}$ 相乘，我們表示爲：

$$C = AB$$

其中

$$c_{ik} = \sum_{j} a_{ij} \times b_{jk}$$

4-4 反矩陣

在例56、例57及例63中，我們得到一個特殊的情形，兩個矩陣相乘會得到一個單位矩陣。對於這樣的矩陣，我們說其中一個矩陣是另一個矩陣的反矩陣。