Chapter 5

行列式

5-1　低階行列式的定義

考慮一個三元一次聯立方程組：

$$\begin{cases} 2x & +2y & +2z & = & 1 \\ x & -y & +z & = & 0 \\ x & +y & -2z & = & 2 \end{cases}$$

我們想計算出這聯立方程組的解答。

在第一冊裡，我們學過二元一次聯立方程組的解法。現在，我們要先學一個新的觀念：「行列式」，來幫助我們解決上面的問題。

5-1　低階行列式的定義

在這一節裡，我們先介紹二階及三階行列式。在下一節，我們會介紹高階行列式。接著，我們會在第三階介紹行列式的一些性質，來簡化我們遇到的計算。最後一節，我們會利用所學到的行列式知識，來解決上面所提出的聯立方程式問題。讀者也許會注意到，我們在第4章最後所談到的反矩陣求法，我們利用的條件式，就跟我們接下來要介紹的二階行列式非常相同。事實上，高階方陣的反矩陣，也跟高階行列式有關聯，但是因為比較複雜，我們不在本書中介紹。

5-1 低階行列式的定義

行列式跟第4章所學的矩陣有外型上的相似，但是，內容卻大不相同。行列式會表示成一個方陣的樣子，外面用兩條直線來夾住(不像矩陣是用中括號)，這跟我們表示絕對值的符號很像。行列式代表的是一個數字，這數字的計算方式，我們介紹如下：

- 1. 二階行列式的定義

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c$$

5-1　低階行列式的定義

- 2. 三階行列式的定義

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \times b_2 \times c_3 + a_2 \times b_3 \times c_3 + a_3 \times b_1 \times c_2 - a_3 \times b_2 \times c_1 - a_2 \times b_1 \times c_3 - a_1 \times b_3 \times c_2$$

5-2　高階行列式的定義及降階

高階行列式的定義比較複雜。為了要計算出這個行列式的值，我們先對行列式中每一個位置決定好正負號，然後在每一行選擇一個數字。這些數字必須分布在不同的列中，然後依照該位置的正負號，將這些數字乘起來。最後把所有計算出來的數字相加在一起，這個值就是此行列式的值。

上面的定義會使得計算時變得很複雜。所以，一般數學家都利用降階的方法來幫助計算。

5-2　高階行列式的定義及降階

首先，我們利用下面的例子來表示一個四階行列式中，每個位置的正負號：

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

其他不同階的行列式，每個位置的正負號排列方法跟上面非常相似。

5-2　高階行列式的定義及降階

- 行列式的降階

　　我們可以任意選擇某一行或某一列，然後依照順序，將該行或該列的數字先寫下來，然後乘上一個行列式，這個行列式是由原行列式裡，除去該數字所在位置的行及列而成。這些乘積最後依照原來數字所在位置的正負號，相加起來，就是該行列式的值。

　　一般來說，高階行列式都會利用降階的方法得到比較低階的行列式來計算。我們通常都利用三階(或二階)行列式來作最後的計算。

5-3 行列式的性質

在前面兩節的介紹中，我們發現行列式的計算不是很容易。在這一節裡，我們要介紹行列式的一些性質，利用這些性質，可以簡化我們的計算。首先要先提醒讀者的是，當我們對行列式內部做些改變時，行列式已經變成不同的行列式了，但是，它們經過計算後得到的數值，是相同的。讀者也可以這麼理解：我們挑選樣子好的行列式來計算它，但條件是，它的行列式數值與我們所作的行列式數值是相同的。